

CHƯƠNG 4.

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. LÝ THUYẾT

1. Dấu của tam thức bậc hai

$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$	
$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in R$
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in R \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
$\Delta > 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$



Nhận xét:

$$ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \qquad ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

2. Bất phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $\geq 0; < 0; \leq 0$)

Để giải BPT bậc hai ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

Dạng 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

Dạng 2: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$

4. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn ta thường dùng phép nâng lũy thừa hoặc đặt ẩn phụ để khử dấu căn.

Dạng 1: $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \end{cases}$

B. TỰ LUẬN**Dạng 1: Giải bất phương trình, hệ bất phương trình bậc hai một ẩn****Bài 1.** Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

c) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

d) $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$

e) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

f) $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$

Bài 2. Lập bảng xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$

d) $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 < 0$

b) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$

c) $16x^2 + 40x + 25 > 0$

d) $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$

e) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$

f) $x^2 - x - 6 \leq 0$

g) $\frac{-3x^2 - x + 4}{x^2 + 3x + 5} > 0$

h) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0$

i) $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{(2x - 5)(x + 2)}{-4x + 3} > 0$

b) $\frac{x - 3}{x + 1} > \frac{x + 5}{x - 2}$

c) $\frac{x - 3}{x + 5} < \frac{1 - 2x}{x - 3}$

d) $\frac{3x - 4}{x - 2} > 1$

e) $\frac{2x - 5}{2 - x} \geq -1$

f) $\frac{2}{x - 1} \leq \frac{5}{2x - 1}$

g) $\frac{-4}{3x + 1} < \frac{3}{2 - x}$

h) $\frac{2x^2 + x}{1 - 2x} \geq 1 - x$

i) $\frac{2x - 5}{3x + 2} < \frac{3x + 2}{2x - 5}$

Bài 5. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $x^2 - mx + m + 3 > 0$

b) $(1 + m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$

c) $mx^2 - 2x + 4 > 0$

Bài 6. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + x + 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 1 > 0 \end{cases}$

g) $-4 \leq \frac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$

h) $\frac{1}{13} \leq \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 7} \leq 1$

i) $-1 < \frac{10x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 1$

Bài 7. Giải các bất phương trình quy về bất phương trình bậc hai sau:

a) $\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 4} \geq x - 3$

b) $\frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x} > -x$

c) $\frac{3x - 47}{3x - 1} > \frac{4x - 47}{2x - 1}$

d) $x + \frac{9}{x + 2} \geq 4$

e) $\frac{(x - 1)^3 (x + 2)^4 (x + 6)}{(x - 7)^3 (x - 2)^2} \leq 0$

f) $x^4 \geq (x^2 + 4x + 2)^2$

g) $x^2 - 7x + 10 < 0$

h) $(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

i) $\frac{x^2 + x + 3}{1 - 2x} < 0$

j) $\frac{1}{x + 2} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} > \frac{x + 1}{x - 3}$

k) $\frac{x - 2}{1 - x} + \frac{x - 3}{x + 1} \geq \frac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$

Bài 8: Giải các hệ bất phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{2x + 3}{x - 1} \geq 1 \\ \frac{(x + 2)(2x - 4)}{x - 1} \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x^2 - 10x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x - 16 < 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x - x^2 - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x^2 + 8x - 3 \leq 0 \\ 17x - 7 - 6x^2 \geq 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3} > 0 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1} > 0 \\ x + 2 < 0 \\ x^4 + x^2 - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Tìm tham số thỏa mãn bất phương trình bậc hai

Bài 1. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

a) $3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4 > 0$

b) $x^2 + (m + 1)x + 2m + 7 > 0$

c) $2x^2 + (m - 2)x - m + 4 > 0$

d) $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$

e) $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$

f) $|3(m + 6)x^2 - 3(m + 3)x + 2m - 3| > 3$

Bài 2. Tìm m để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$

b) $(m - 3)x^2 + (m + 2)x - 4 > 0$

c) $(m^2 + 2m - 3)x^2 + 2(m - 1)x + 1 < 0$

d) $mx^2 + 2(m - 1)x + 4 \geq 0$

e) $(3 - m)x^2 - 2(2m - 5)x - 2m + 5 > 0$

f) $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0$

Bài 3. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

a) $\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m + 1)x + 9m + 4} < 0$

b) $\frac{3x^2 - 5x + 4}{(m - 4)x^2 + (1 + m)x + 2m - 1} > 0$

c) $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$

d) $-4 < \frac{2x^2 + mx - 4}{-x^2 + x - 1} < 6$

Bài 4. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương:

a) $x^2 - 4x + m - 5$

d) $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m + 4$

b) $x^2 - (m+2)x + 8m + 1$

c) $x^2 + 4x + (m-2)^2$

e) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2)$

Bài 5. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm:

a) $(m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1$

d) $-x^2 + 4(m+1)x + 1 - m^2$

b) $(m+2)x^2 + 5x - 4$

e) $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$

c) $mx^2 - 12x - 5$

f) $(m-2)x^2 - 2(m-3)x + m - 1$

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi giá trị x:

a) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$

b) $\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$

c) $(m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2 \leq 0$

d) $\frac{3x^2 - 5x + 4}{(m-4)x^2 + (1+m)x + 2m - 1} > 0$

Dạng 3: Giải bất phương trình chứa dấu trị tuyệt đối và căn thức

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 - |5x - 3| < 0$

b) $x - 8 > |x^2 + 3x - 4|$

c) $|x^2 - 1| - 2x < 0$

d) $|x^2 + 4x + 3| > |x^2 - 4x - 5|$

e) $|x - 3| - |x + 1| < 2$

f) $|x^2 - 3x + 2| + x^2 > 2x$

g) $\left| \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 2} \right| \leq 1$

h) $\frac{2x - 5}{|x - 3|} + 1 > 0$

i) $\frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x$

b) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$

c) $\sqrt{-x^2 - 4x + 21} < x + 3$

d) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$

e) $\sqrt{3x^2 + 13x + 4} \geq x - 2$

f) $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} > x + 1$

g) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} > \sqrt{2x - 8}$

h) $\sqrt{2 - x} > \sqrt{7 - x} - \sqrt{-3 - 2x}$

i) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 2} \leq 1$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 > -x^2 + 11x$

b) $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$

c) $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

d) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{3 - x} \leq 2$$

$$b) \frac{\sqrt{-2x^2 - 15x + 17}}{x + 3} \geq 0$$

$$c) (x + 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$$

$$d) \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x + 4}$$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

$$a) x + 2 \leq \sqrt[3]{x^2 + 8}$$

$$b) \sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}$$

$$c) \sqrt[3]{x + 1} > \sqrt{x - 3}$$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau

$$a) \sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4$$

$$b) \sqrt{5x^2 + 61x} < 4x + 2$$

$$c) \frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geq 2$$

$$d) \frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leq 2x + 3$$

$$e) (x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$$

$$f) \frac{9x^2 - 4}{\sqrt{5x^2 - 1}} \leq 3x + 2$$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

$$a) (x - 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$$

$$e) \sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$$

$$b) \sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$$

$$f) \sqrt{3x + 1} \leq \sqrt{2x - 3}$$

$$c) \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 6x + 5} \leq \sqrt{2x^2 + 9x + 7}$$

$$g) \sqrt{x^2 - 4x + 3} < \sqrt{2x^2 - 10x + 11}$$

$$d) \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$h) \sqrt{x^2 - x - 1} \leq \sqrt{3 - x}$$

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 2} > \sqrt{x - 3}$$

$$d) \sqrt{x + 3} \geq \sqrt{2x - 8} + \sqrt{7 - x}$$

$$b) \sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 3} \leq \sqrt{4x + 9}$$

$$e) \sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 4} > \sqrt{x + 3}$$

$$c) \sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} > 0$$

$$f) \sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

$$a) (x + 1)(x + 4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

$$d) (x + 1)(x + 4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

$$b) \sqrt{3x^2 + 6x + 16} + \sqrt{x^2 + 2x} = 2\sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

$$e) \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$$

$$c) (x + 5)(x - 2) + 3\sqrt{x(x + 3)} > 0$$

$$f) (x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$$