

## CHUYÊN ĐỀ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC, PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### A. LÝ THUYẾT

#### 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp sử dụng các điều kiện sau:

1) D được gọi là TXĐ của hs  $y = f(x) \Leftrightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}$

2)  $\frac{A}{B}$  có nghĩa khi  $B \neq 0$ ;  $\sqrt{A}$  có nghĩa khi  $A \geq 0$ ;  $\frac{A}{\sqrt{B}}$  có nghĩa khi  $B > 0$

3)  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ;  $-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow 1 \pm \sin x \geq 0 \& 1 \pm \cos x \geq 0$

4) Các giá trị đặc biệt :

- $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

5) Hàm số  $y = \tan x$  xác định khi  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hàm số  $y = \cot x$  xác định khi  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

#### 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác

Chú ý:

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\cot(-x) = -\cot x$
- $\sin^2(-x) = [\sin(-x)]^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$

**Phương pháp:**

Bước 1 : Tìm TXĐ  $D$  của hàm số  $f(x)$

Bước 2 : Chứng minh  $D$  là tập đối xứng, nghĩa là  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ,

Bước 3 : Tính  $f(-x)$ , so sánh với  $f(x)$ . Có 3 khả năng:

$f(-x) = f(x) \rightarrow$  hàm chẵn

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$  hàm lẻ

$f(-x) \neq \pm f(x) \rightarrow$  hàm không chẵn, không lẻ

#### 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác

Sử dụng các tính chất sau:

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ ;  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ;  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ;  $A^2 + B \geq B$

- $-1 \leq -\sin x \leq 1, -1 \leq -\cos x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1$
- Hàm số  $y = f(x)$  luôn đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  

$$\max_{[a;b]} f(x) = f(b); \min_{[a;b]} f(x) = f(a)$$
- Hàm số  $y = f(x)$  luôn nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  

$$\max_{[a;b]} f(x) = f(a); \min_{[a;b]} f(x) = f(b)$$
- $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

### 3. Giải phương trình lượng giác

#### 3.1. Giải các phương trình dạng bậc nhất $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ .

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra nếu  $a^2 + b^2 < c^2$  thì phương trình vô nghiệm.

Bước 2: Kiểm tra nếu  $\frac{\pi}{2}$  thì chia cả hai vế phương trình cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$

→ Biến đổi vế trái sử dụng công thức khai triển sin/ cos của một tổng

→ phương trình lượng giác cơ bản.

#### 3.2. Giải các phương trình dạng bậc nhất $a \cdot (\sin x \pm \cos x) + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c = 0$ .

Phương pháp:

Bước 1: Đặt  $t = \sin x \pm \cos x, |t| \leq \sqrt{2}$

Bước 2: Biến đổi  $\sin x \cdot \cos x$  theo  $t$  rồi thay vào phương trình

→ Biến đổi và giải phương trình tìm ra  $t$  → giải phương trình cơ bản để tìm ra  $x$ .

#### 3.3. Giải các phương trình dạng bậc 2 đối với sin, cos:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra  $\cos x = 0$  có là nghiệm của phương trình

Bước 2: Nếu  $\cos x = 0$  không là nghiệm thì chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$ , phương trình trở thành:

$$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = 0$$

→ Giải phương trình bậc hai đối với  $\tan x$

#### 3.4. Chú ý

$$\sin x = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = k2\pi, \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{R})$$

**B. BÀI TẬP****Dạng 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau****Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau**

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \cos x + \sin x & \text{d) } y = \cos \frac{x+1}{x+2} & \text{g) } y = \sin \sqrt{x+4} \\ \text{b) } y = \cos \sqrt{x^2 - 3x + 2} & \text{e) } y = \frac{2}{\cos 2x} & \text{h) } y = \sqrt{2 - \sin x} \\ \text{c) } y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}} & \text{f) } y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{i) } y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

**Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau**

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2\cos x} & \text{e) } y = \frac{1 + \cos x}{\sin x} & \text{i) } y = \frac{\tan x}{3 + \cos x} \\ \text{b) } y = \cot(x + \pi/3) & \text{f) } y = \sqrt{\frac{\cos x + 3}{\sin x + 1}} & \text{j) } y = \tan(\pi/3 - 3x) \\ \text{c) } y = \frac{\tan x + 3}{\sin 3x} & \text{g) } y = \sqrt{1 + \cos x} & \text{k) } y = \frac{1 + \tan x}{\cos x - 1} \\ \text{d) } y = \tan x + \cot x & \text{h) } y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} & \text{l) } y = \frac{\cot x}{\sin x - 1} \end{array}$$

**Bài 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau**

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = -2\cos x & \text{e) } y = \sin x + x & \text{i) } y = \sin 2x + 2 \\ \text{b) } y = \frac{1}{2} \tan^2 x & \text{f) } y = \sin|x| + x^2 & \text{j) } y = \cos \sqrt{3x} \\ \text{c) } y = \sin 2x & \text{g) } y = -2 + 3\cos x & \text{k) } y = \cos x - \sin x \\ \text{d) } y = \tan x \sin x & \text{h) } y = \cos x - \sin|x| & \text{l) } y = \cot x |\sin x| \end{array}$$

**Bài 4. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số**

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 & \text{d) } y = 3 - \frac{1}{2} \cos 2x & \text{f) } y = -1 - \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \text{b) } y = \sqrt{1 + \cos(4x^2)} - 2 & \text{e) } y = 2\sqrt{\sin x} + 3 & \text{g) } y = 5\cos \sqrt{x + \frac{\pi}{4}} \\ \text{c) } y = \sin^2 x - 4\sin x + 3 & & \text{h) } y = \sqrt{4 - 3\cos^2 3x} + 1 \end{array}$$

**Bài 5. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sin x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] & \text{c) } y = \cos x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{b) } y = \sin x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] & \text{d) } y = \cos \pi x \text{ trên đoạn } \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right] \end{array}$$

**Dạng 2. Phương trình cơ bản****Bài 1. Giải các phương trình cơ bản sau**

- a)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- b)  $\sin(3x - 20^\circ) = -1$
- c)  $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$
- d)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
- e)  $\cot 2x = -\sqrt{3}$
- f)  $\cos\left(\frac{x}{3} + 60^\circ\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- g)  $\sin(x - 45^\circ) = \cos 2x$
- h)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
- i)  $2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2x + \pi}{3}\right) = 2$
- j)  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cot(5x + 1) = 0$
- k)  $\tan(2x - 15^\circ) - 1 = 0$
- l)  $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
- m)  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (\cos 2x - 1) = 0$  n)
- n)  $\sin(2x - 1) = \sin(3x + 1)$  o)
- o)  $\cos 3x = -\frac{3}{4}$

**Bài 2. Giải các phương trình cơ bản sau**

- a)  $2\sin(x - 30^\circ) = \sqrt{2}$
- b)  $\sqrt{3} \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -3$
- c)  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- d)  $6\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) + 3\sqrt{3} = 0$
- e)  $3\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3} = 0$
- f)  $4\tan(5x - 1) + 6 = 0$
- g)  $-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{3} - \frac{4}{3} = 0$
- h)  $2\sqrt{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0$
- i)  $\cos x \cdot [2\sin(x - 30^\circ) + \sqrt{3}] = 0$

**Bài 3. Tìm nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho**

a)  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  với  $0 < x < \pi$

b)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  với  $-\pi < x < \pi$

c)  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  với  $-180^\circ < x < 90^\circ$

d)  $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  với  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

**Dạng 3. Phương trình bậc nhất đối với hàm lượng giác****Bài 1. Giải các phương trình dạng  $a.\sin x + b.\cos x = c$  dưới đây**

a)  $\sin x + \cos x = 1$

f)  $3\cos x + 4\sin x = -5$

b)  $3\cos 2x - 4\sin 2x = 1$

g)  $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$

c)  $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{2}$

h)  $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$

d)  $3\sin x + 4\cos x = 5$

i)  $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

e)  $3\sin(x+1) + 4\cos(x+1) = 5$

**Bài 2. Giải các phương trình sau**

a)  $3\sin x + 4\cos x = 5$

d)  $2\sin 2x - 2\cos 2x = -\sqrt{2}$

b)  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

e)  $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

c)  $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$

**Dạng 4. Phương trình bậc hai đối với hàm lượng giác****Bài 1. Giải các phương trình sau**

a)  $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$

c)  $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$

b)  $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

d)  $4 \cdot \sin x \cos x + 3\sin^2 x = 6\sin x$

**Bài 2. Giải các phương trình sau**

a)  $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

c)  $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

b)  $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2\tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$

d)  $5 \cdot \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \cdot \tan^2 x$

**Bài 3. Giải các phương trình sau**

a)  $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

- b)  $\frac{\cos x (2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$
- c)  $\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$
- d)  $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

**Bài 4. Giải các phương trình sau**

- a)  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$
- b)  $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$
- c)  $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

**Bài 5.** Cho  $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{2}{5}\sin 5x$ . Hãy giải phương trình  $f(x) = 0$ .

**Bài 6. Giải các phương trình sau**

- a)  $\sin \frac{5x}{2} = 5\cos^2 x \cdot \sin \frac{x}{2}$
- b)  $2\cos^2 \frac{6x}{5} + 1 = 3\cos \frac{x}{5}$
- c)  $\sin 2x(\cot x + \tan 2x) = 4\cos^2 x$
- d)  $\tan^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$

**Bài 7. Giải các phương trình sau**

- a)  $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$
- b)  $48 - \frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 x}(1 + \cot 2x \cdot \cot x) = 0$
- c)  $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$
- d)  $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

**Bài 8. Giải các phương trình sau**

- a)  $\sin 2x + 2\tan x = 3$
- b)  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$
- c)  $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$
- d)  $\sin 4x = \tan x$

**BÀI TẬP TỔNG HỢP****Bài 9. Giải các phương trình sau**

- a)  $\cos^2 3x \cos 2x - \cos 2x = 0$
- b)  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

- c)  $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$  f)  $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$
- d)  $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$  g)  $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$
- e)  $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$  h)  $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

**Bài 10. Giải các phương trình sau**

- a)  $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$
- b)  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$
- c)  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$
- d)  $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$
- e)  $\frac{1 - 2 \sin x \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$
- f)  $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$
- g)  $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$
- h)  $\frac{1 + \sin x + \cos 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

**Bài 11. Giải các phương trình sau**

- a)  $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$
- b)  $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$
- c)  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = 2 \sin x \cdot \sin 2x$
- d)  $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$
- e)  $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$
- f)  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$
- g)  $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$

