

CHUYÊN ĐỀ 7. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG
GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

A. Lý thuyết

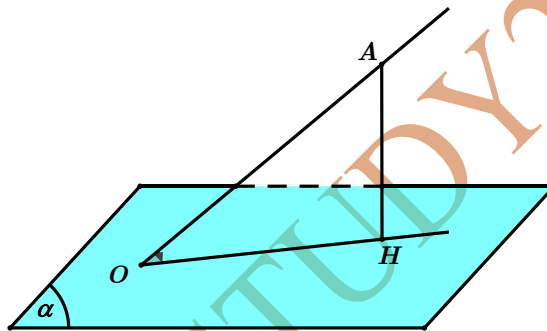
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Xác định hình chiếu vuông góc của d xuống mặt phẳng (α) là d' .

- Tìm giao điểm $O = d \cap (\alpha)$.
- Dụng hình chiếu vuông góc của A xuống (α) là H (chọn đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)).

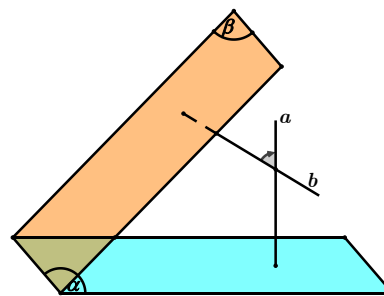
Bước 2: Góc giữa đường thẳng d và d' là góc đường thẳng d và mặt phẳng (α) .
 Tính số đo của góc đó bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông.



2. Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp 1

Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β) . Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .



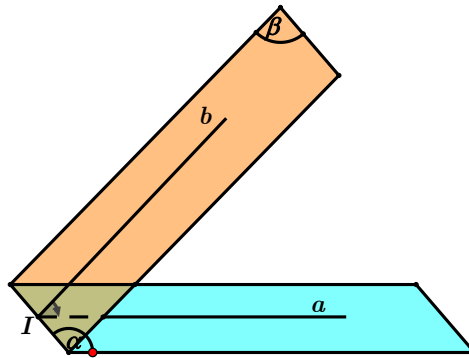
$$\left. \begin{matrix} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (a, b) = ((\alpha), (\beta)).$$

Phương pháp 2

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β) .

Lấy điểm $I \in \Delta$. Trong (α) dựng $a \perp \Delta$ tại I . Trong (β) dựng $b \perp \Delta$ tại I .

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .



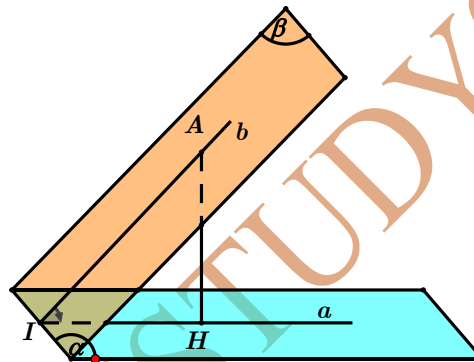
Phương pháp 3

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β) .

Trong (β) lấy điểm A . Dựng hình chiếu H của A xuống mặt phẳng (α) .

Từ H dựng $HI \perp \Delta$.

Khi đó góc AHI là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .



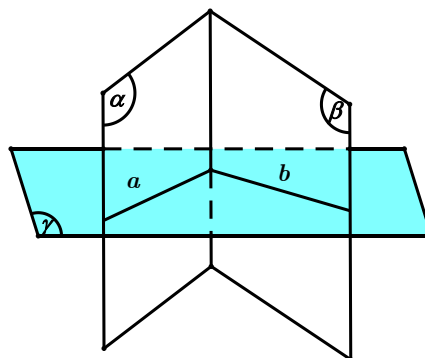
Phương pháp 4

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β) .

Chọn mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.

Tìm các giao tuyến $a = (\gamma) \cap (\alpha)$, $b = (\gamma) \cap (\beta)$.

Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .



B. Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O; $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $(MN, (ABCD)) = 60^\circ$.

- Tính MN và SO.
- Tính góc giữa MN và (SBD).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

- SC và (ABCD)
- SC và (SAB)
- SB và (SAC)
- AC và (SBC)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật; $SA \perp (ABCD)$. Cạnh $SC = a$ hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β .

- Tính SA.
- Chứng minh: $AB = a\sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC, có ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α .

- Chứng minh hình chiếu của S trên (ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- Tính khoảng cách từ S đến (ABC).

Bài 5. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' \perp (ABC)$. Đường chéo BC' của mặt bên BCC'B' hợp với (ABB'A') góc 30° .

- Tính AA'.
- Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến (BA'C').
- Gọi N là trung điểm của cạnh BB'. Tính góc giữa MN và (BA'C').

Bài 6. Cho lăng trụ ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; $AA' \perp (ABC)$. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B'C' có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC'B' góc β .

- Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α .
- Chứng minh rằng: $\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).
- Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Bài 8. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O; $SA \perp (ABCD)$. Tính SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60° .

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 10. Cho hình vuông ABCD cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

- (SBC) và (ABC)
- (SBD) và (ABD)
- (SAB) và (SCD)

Bài 11. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $SA \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Chứng minh ASC vuông.
- Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng:

- (SBC) và (ABC)
- (SAB) và (SBC)
- (SBC) và (SCD)

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy (ABCD). Tính góc giữa:

- Đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD);
- Đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB);
- Đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC);
- Đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC).

Bài 14. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA bằng 2a và vuông góc với đáy (ABC).

- Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và AC. Tính góc giữa BM và mặt phẳng (ABC);
- Tính góc giữa SN với mặt phẳng (SAB)

Bài 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° .

- Tính độ dài MN và SO.
- Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trung tuyến SI của tam giác đều SAB vuông góc với đáy (ABCD) của hình chóp.

- a) Chứng minh hai đường thẳng SC và SD tạo với mặt phẳng (SAB) hai góc bằng nhau.
- b) Tính góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB), trong đó M là trung điểm SD.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD), góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABCD).

Bài 18. Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA=BC=a$; cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

- a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).
- c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a, tâm của đáy là điểm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD). Tính độ dài cạnh SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60° .

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB=2a$; cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

- a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
- b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

- a) (SBC) và (ABC)
- b) (SBD) và (ABD)
- c) (SAB) và (SCD)

Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với đáy. Gọi M;N lần lượt là trung điểm SB và SD. Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD).

Bài 23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với đáy. Gọi E và F lần lượt là trung điểm SB và SD. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AEF) và (ABCD).

