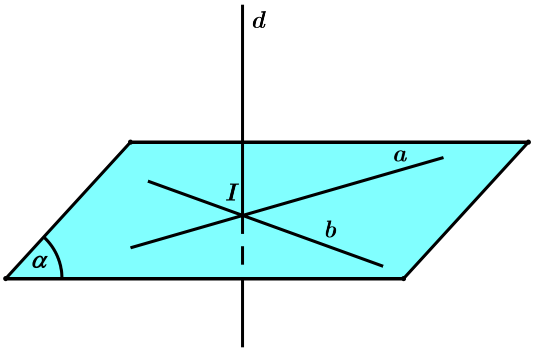
CHUYÊN ĐỀ 5. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

A. Lý thuyết

Phương pháp 1:

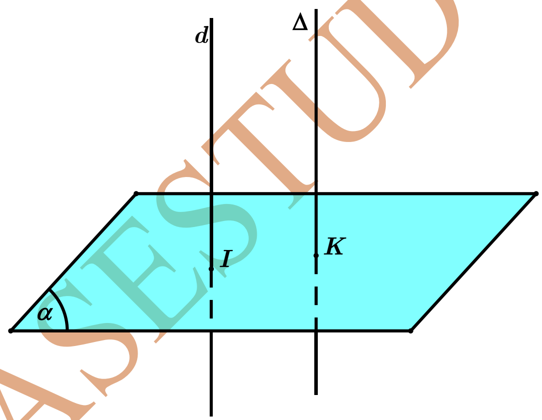
Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau nằm trong (α).



$$\left.\begin{matrix} d \perp a \\ d \perp b \\ a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp (P).$$

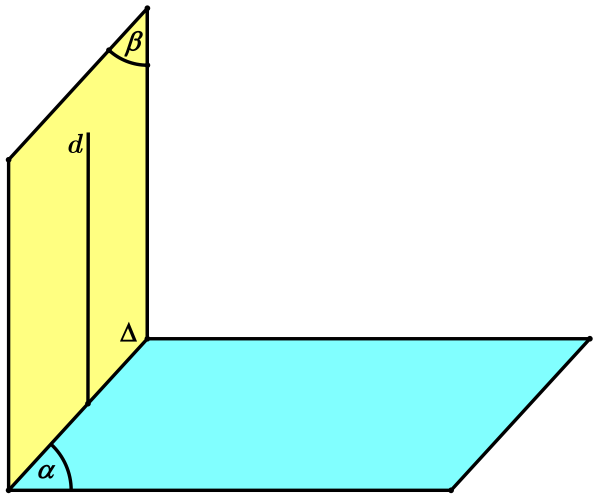
Phương pháp 2:

Sử dụng tính chất: $d \,/\!/\, \Delta$ mà $\Delta \perp (\alpha)$ thì $d \perp (\alpha)$.



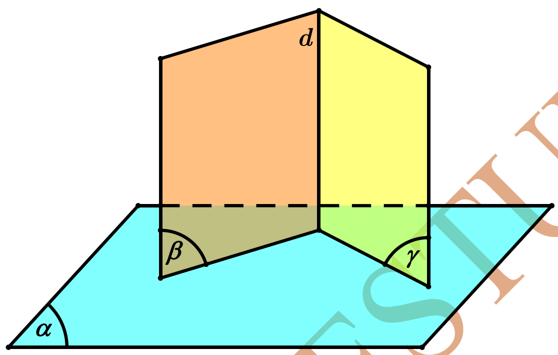
Phương pháp 3:

Nếu hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến Δ, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (β) mà vuông góc với giao tuyến Δ thì vuông góc với mặt phẳng (α).



Phương pháp 4:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\\(P)\cap(Q)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R).$$

<u>B. Bài tập</u>

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông tâm O, SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).

b) Chứng minh: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó, suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

c) Chứng minh : HK ⊥ (SAC). Từ đó, suy ra HK ⊥ AI.

Bài 2. Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông tại B; SA ⊥ (ABC).

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB).

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh: AH ⊥ SC.

Bài 3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh: SO ⊥ (ABCD).

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. Chứng minh IJ ⊥ (SBD).

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: BC ⊥ (AID).

b) Vẽ đường cao AH của ΔAID. Chứng minh: AH ⊥ (BCD).

Bài 5. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên (ABC). Chứng minh rằng:

a) BC ⊥ (OAH).

b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng SI ⊥ (SCD), SJ ⊥ (SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh: SH ⊥ AC.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: BM ⊥ SA. Tính AM theo a.

Bài 7. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và SC = $a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) Chứng minh: SH ⊥ (ABCD).

b) Chứng minh: AC ⊥ SK và CK ⊥ SD.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình chữ nhật có AB = a, BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh: SA ⊥ (ABCD) và tính SA.

b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ). Chứng minh: AK ⊥ (SBC), AL ⊥ (SCD).

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

Bài 9. Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh:

a) Tam giác SDE vuông tại S.

b) SD ⊥ CE.

c) Tam giác SCD vuông.

Bài 10. Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P). Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C′ là hình chiếu của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC′.

a) Chứng minh: $CC' \perp (MBD)$.

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Chứng minh: K là trực tâm của ΔBCD.

Bài 11. Cho hình tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

b) Từ đó, suy ra nếu một tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$;

b) Trong tam giác SAB, gọi H là chân đường cao kẻ từ A. Chứng minh rằng: $SH \perp (SBC)$.

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD.

a) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$;

b) Chứng minh tam giác SBC, SCD là các tam giác vuông.

c) Xác định mp trung trực của đoạn thẳng SC.

Bài 14. Cho tứ diện SABC có đáy ABC vuông tại A, biết $SB \perp (ABC)$, SB=AB. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC. Chứng minh rằng:

a) $AC \perp (SAB)$

b) $BH \perp (SAC)$

c) $KI \perp SA$

d) $AB \perp IH$

Bài 15. Lấy điểm I bất kì trong đường tròn (O;R). Vẽ dây CD qua I. Trên đường vuông góc mặt phẳng chứa (O;R) tại I lấy điểm S sao cho SO = R. Gọi E là điểm đối xứng của D qua O. Chứng minh:

a) ΔSDE vuông.

b) SD vuông góc CE.

c) ΔSCD vuông.