

CHƯƠNG 3. TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

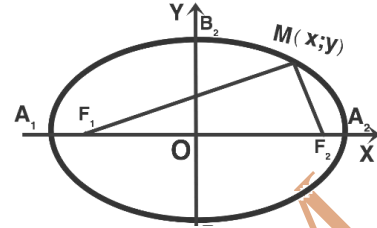
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho F_1, F_2 cố định với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$ ($a > c$)

F_1, F_2 : các **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$: **tiêu cự**.



2. Phương trình chính tắc của elip

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

• Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.

• Với $M(x; y) \in (E)$, MF_1, MF_2 đgl các bán kính qua tiêu điểm của M.

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x, MF_2 = a - \frac{c}{a}x$$

3. Hình dạng của elip

• (E) nhận các trục tọa độ làm các trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

• Tọa độ các đỉnh: $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$

• Độ dài các trục: trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$

• Tâm sai của (E): $e = \frac{c}{a}$ ($0 < e < 1$)

• Hình chữ nhật cơ sở: tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ (ngoại tiếp elip).

4. Đường chuẩn của elip

• Phương trình các đường chuẩn Δ_i ứng với các tiêu điểm F_i là: $x \pm \frac{a}{e} = 0$

• Với $M \in (E)$ ta có: $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e$ ($e < 1$)

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho elip (E). Xác định độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai, phương trình các đường chuẩn của (E), với (E) có phương trình:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

e) $16x^2 + 25y^2 = 400$

f) $x^2 + 4y^2 = 1$

g) $4x^2 + 9y^2 = 5$

h) $9x^2 + 25y^2 = 1$

Bài 2. Xác định các yếu tố độ dài các trục, tiêu cự, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, tâm sai của (E): $4x^2 + 16y^2 - 1 = 0$

Bài 3. Lập phương trình chính tắc của (E) biết

a) $A(0; -2)$ là một đỉnh và $F(1; 0)$ là một tiêu điểm

- b) Tiêu cự là 8 và qua điểm $M(-\sqrt{15}; 1)$.
- c) Tâm sai là $\frac{2}{3}$ và qua điểm $A(2; \frac{-5}{3})$.
- d) Tâm O và qua 2 điểm $M(2\sqrt{2}; -3)$ và $N(4; \sqrt{3})$
- e) Một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và qua $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$.
- f) Trục lớn bằng 6 và tiêu cự bằng 4.
- g) Trục lớn trên Ox, trục nhỏ trên Oy, độ dài các trục là 8 và 6.
- h) Độ dài trục lớn là 26, tâm sai $e = \frac{12}{13}$ và hai tiêu điểm trên Ox.

Bài 10. Tìm phương trình chính tắc của elip (E), biết :

- a) Trục lớn trên Ox, trục nhỏ trên Oy, có 2 đỉnh là $(-4; 0)$ và $(0; \sqrt{15})$.
- b) Tâm O, một đỉnh trên trục lớn là $(4; 0)$ và elip qua $M(2; -\frac{3\sqrt{3}}{2})$.
- c) Phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở là : $x \pm 4 = 0$ và $y \pm 3 = 0$.
- d) Hai đỉnh trên trục lớn là $(-3; 0); (3; 0)$ và tâm sai là $e = \frac{2}{3}$.
- e) Một đỉnh trên trục lớn là $(0; 5)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 41$.
- f) Tâm O, trục lớn trên Ox, qua $M(-\sqrt{5}; 2)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 10.
- g) Tâm O, trục nhỏ trên Oy, tiêu cự bằng 6 và tâm sai $e = \frac{3}{5}$.

Bài 11. Tìm phương trình chính tắc của elip (E). Biết :

- a) Biết tiêu cự bằng $2\sqrt{2}$ và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta) : x + 6y - 20 = 0$.
- b) Qua $M(-2; \sqrt{2})$ và phương trình hai đường chuẩn là: $x \pm 4 = 0$
- c) Một tiêu điểm là $(-2; 0)$ và một đường chuẩn là $x = 3$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 12 và một đỉnh là $(\sqrt{12}; 0)$.

Bài 12. Tìm M thuộc:

- a) (E) : $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$.
- b) (E) : $9x^2 + 25y^2 = 225$ sao cho $MF_1 = 2MF_2$.
- c) (E) : $3x^2 + 4y^2 = 48$ sao cho $5MF_1 = 3MF_2$.
- d) (E) : $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ sao cho M nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc vuông.
- e) (E) : $x^2 + 4y^2 = 4$ và nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc 60° .
- f) (E) : $7x^2 + 16y^2 = 112$ có bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{5}{2}$.

Bài 13. Cho Elip (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- a) Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng tại tiêu điểm.
 b) Cho điểm $M \in (E)$ và F_1, F_2 là hai tiêu điểm. Chứng minh: $OM_2 + MF_1 \cdot MF_2$ không đổi.

Bài 14. Cho Elip $(E) : x^2 + 4y^2 - 9 = 0$.

- a) Tìm tâm, tiêu điểm, đỉnh, tâm sai.
 b) Tìm m để đường thẳng $(d) : mx + y - 6 = 0$ và (E) có điểm chung.

Bài 15. Cho Elip $(E) : 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

- a) Một đường thẳng qua tiêu điểm và song song với trục tung, cắt (E) tại hai điểm A, B. Tính độ dài AB.
 b) Cho $M \in (E)$. Chứng minh: $(MH_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - 9)$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm.

Bài 16. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

- a) Tìm $M \in (E)$ để $MF_1 (x_M < 0)$ ngắn nhất.
 b) Cho M bất kỳ thuộc (E) . Chứng minh : $2\sqrt{2} \leq OM \leq 3\sqrt{2}$

Bài 17. Cho elip (E) và đường thẳng d vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm bên phải F_2 cắt (E) tại hai điểm M, N.

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

- Tìm tọa độ các điểm M, N.
- Tính MF_1, MF_2, MN .

Bài 18. Cho elip (E) . Tìm những điểm $M \in (E)$ sao cho:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

- $MF_1 = MF_2$
- $MF_2 = 3MF_1$
- $MF_1 = 4MF_2$

Bài 19. Cho elip (E) . Tìm những điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông, với:

a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ c) $7x^2 + 16y^2 = 112$

Bài 20. Cho Elip $(E) : 4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$.

- a) Một đường thẳng qua gốc O có hệ số góc k cắt Elip (E) tại A. Tính OA^2 theo k.
 b) Cho 2 điểm A, B bất kỳ trên (E) . Chứng minh: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ không đổi.

Bài 21. Cho Elip $(E) : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

- a) Tìm m để đường thẳng $mx - y + 8m = 0$ cắt (E) tại hai điểm phân biệt.
 b) Viết phương trình đường thẳng qua $I(1 ; 2)$ cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của AB.

Bài 22. Tìm điểm M trên $(E) : x^2 + 4y^2 = 4$ và nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc 60° .

Bài 23. Cho đường cong $(C_m) : \frac{x^2}{m^2 - 24} + \frac{y^2}{2 - m} = 1$.

- Tìm m để (C_m) là Elip có tiêu điểm trên Ox.
- Gọi (C_{-7}) là elip ứng với $m = -7$. Tìm trên (C_{-7}) điểm M sao cho hiệu số 2 bán kính qua tiêu điểm bằng $\frac{32}{5}$.

Bài 24. Lập phương trình tiếp tuyến của $(E) : \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$

- Tại điểm M(4 ; 3)
- Qua điểm N(6 ; 3)

Bài 25.

- Lập phương trình tiếp tuyến của $(E) : x^2 + 4y^2 = 20$ qua $M\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$.
- Lập phương trình tiếp tuyến của $(E) : 9x^2 + 16y^2 = 144$ biết tiếp tuyến này song song với đường thẳng $(\Delta) : 9x + 16y - 1 = 0$.

Bài 26. Cho elip $(E) : x^2 + 4y^2 = 60$.

- Tìm tiêu điểm, các đỉnh, tâm sai và tính khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E)
- Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (E) , biết (d) vuông góc với $(\Delta) : 2x - 3y = -1$.

Bài 27. Cho elip $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm A(3 ; -4).

- Tìm tiêu điểm, độ dài các trục, các đường chuẩn của (E)
- Viết phương trình tiếp tuyến của (E) vẽ từ A.

Bài 28. Cho elip (E) có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 36 và các bán kính qua tiêu điểm M nằm trên (E) là 9 và 15.

- Viết phương trình chính tắc của (E) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M.

Bài 29. Cho $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(d) : mx - y - 1 = 0$.

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng (d) luôn cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt.
- Viết phương trình tiếp tuyến của (E) , biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm N(1 ; -3).

Bài 30. Cho $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $(d) : y = x + m$.

- Định m để (d) có điểm chung với (E) .
- Định m để (d) tiếp xúc với (E) .

Bài 31. Cho Elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- Tìm tiêu điểm và độ dài các trục của (E) .
- Điểm $M \in (E)$ nhìn 2 tiêu điểm dưới một góc 90° . Viết pttt của (E) tại M.

Bài 32. Cho elip (E) có khoảng cách giữa hai đường chuẩn là 36 và các bán kính qua tiêu điểm của điểm M nằm trên (E) là 9 và 15.

- Viết phương trình chính tắc của (E).
- Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M.

Bài 33. Cho Elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- Cho $M(3 ; m) \in (E)$, viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi $m > 0$.
- Cho A, B là 2 điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Hãy tính $AF_2 + BF_1$.

Bài 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Xác định tọa độ các tiêu điểm, tính độ dài các trục và tâm sai của elip (E).

Bài 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 36. Cho Elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm A và B thuộc (E) biết A, B đối xứng qua Ox và ΔABC đều.

Bài 37. Viết phương trình các tiếp tuyến của elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, biết rằng tiếp tuyến đi qua $M(3 ; 1)$.

Bài 38. Viết phương trình các tiếp tuyến của elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, biết rằng tiếp tuyến đi qua $A(4 ; -3)$.

Bài 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$.

- Tìm tọa độ các tiêu điểm của (E).
- Tìm điểm M trên (E) nhìn các tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

