

TỌA ĐỘ VECTO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trục tọa độ

• Trục tọa độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị \vec{e} . Kí hiệu $(O; \vec{e})$.

• Tọa độ của vectơ trên trục: $\vec{u} = (a) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{e}$.

• Tọa độ của điểm trên trục: $M(k) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\vec{e}$.

• Độ dài đại số của vectơ trên trục: $\overline{AB} = a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a\vec{e}$.

Chú ý: + Nếu \overrightarrow{AB} cùng hướng với \vec{e} thì $\overline{AB} = AB$.

Nếu \overrightarrow{AB} ngược hướng với \vec{e} thì $\overline{AB} = -AB$.

+ Nếu $A(a), B(b)$ thì $\overline{AB} = b - a$.

+ Hệ thức Sa-lơ: Với A, B, C tùy ý trên trục, ta có: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.



2. Hệ trục tọa độ

• Hệ gồm hai trục tọa độ Ox, Oy vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị trên Ox, Oy lần lượt là \vec{i}, \vec{j} . O là gốc tọa độ, Ox là trục hoành, Oy là trục tung.

• Tọa độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ: $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Tọa độ của điểm đối với hệ trục tọa độ: $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Tính chất: Cho $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y'), k \in \mathbb{R}, A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y') \quad k\vec{a} = (kx; ky)$$

$$\vec{b} \text{ cùng phương với } \vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: x' = kx \text{ và } y' = ky.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ (nếu } x \neq 0, y \neq 0).$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

• Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

• Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

• Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq -1$: $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$.

(M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$).

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

I. Tọa độ véc tơ - Tọa độ điểm

Bài 1. Biểu diễn véc tơ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ biết

a) $\vec{u}(2; -5)$

b) $\vec{u}(-4; 0)$

Bài 2. Xác định tọa độ của véc tơ \vec{u} biết:

a) $\vec{u} = -5\vec{i} - 2\vec{j}$

b) $\vec{u} = 3\vec{i}$

c) $\vec{u} = -7\vec{j}$

Bài 3. Xác định tọa độ và độ dài của véc tơ \vec{c} biết

a) $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{a}(2; -1)$; $\vec{b}(3; 4)$

b) $\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$; $\vec{a}(-2; 3)$; $\vec{b}(3; -6)$

Bài 4. Cho ba điểm A(-1;1); B(1;3)a) Xác định tọa độ của các véc tơ: \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BA} b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM}(3; 0)$ c) Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA}(1; 1)$ **Bài 5.** Trên trục $x'Ox$ cho 2 điểm A, B có tọa độ lần lượt là -2 và 5.a) Tìm tọa độ của \overrightarrow{AB} .

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

c) Tìm tọa độ của điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.d) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = -1$.**Bài 6.** Cho A(2; 3), B(-1; -1), C(6; 0).a) Tìm tọa độ các véc tơ \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} . Từ đó chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.b) Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.c) Tìm tọa độ điểm E thỏa $\overrightarrow{OE} + 3\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EA} = \vec{0}$ **Bài 7.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A(2; 1), B(1; 1), C(3; 4). Xác định điểm N trên trục Ox sao cho $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Bài 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm A(4;1); B(0;3); C(1;2).

a) Chứng minh ba điểm A, B, C lập thành ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ của trung điểm cạnh AB.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ điểm D của hình bình hành ABCD.

e) Tìm tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho $AE + BE$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Bài 9.** Viết tọa độ của các vector sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i}$; $\vec{d} = -2\vec{j}$.

b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$; $\vec{d} = -4\vec{j}$; $\vec{e} = 3\vec{i}$.

II. Biểu diễn Véc tơ

Bài 1. Biểu diễn véc tơ \vec{c} theo các véc tơ \vec{a} ; \vec{b} biết:

a) $\vec{a}(2; -1)$; $\vec{b}(-3; 4)$; $\vec{c}(-4; 7)$

b) $\vec{a}(1; 1)$; $\vec{b}(2; -3)$; $\vec{c}(-1; 3)$

Bài 2. Cho bốn điểm A(1;1); B(2;-1); C(4;3); D(16;3). Hãy biểu diễn véc tơ \overrightarrow{AD} theo các véc tơ \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} **Bài 3.** Biểu diễn véc tơ \vec{c} theo các véc tơ \vec{a} ; \vec{b} biết:

a) $\vec{a}(-4; 3)$; $\vec{b}(-2; -1)$; $\vec{c}(0; 3)$

b) $\vec{a}(4; 2)$; $\vec{b}(5; 3)$; $\vec{c}(2; 0)$

Bài 4. Cho bốn điểm A(0;1); B(2;0); C(-1;2); D(6;-4). Hãy biểu diễn véc tơ \overrightarrow{AD} theo các véc tơ \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} **Bài 5.** Cho các véc tơ: $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (-5; 1)$ và $\vec{c} = (-5; -12)$.a) Tính tọa độ véc tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

b) Phân tích vector \vec{c} theo hai vector \vec{a} và \vec{b} .

Bài 6. Viết tọa độ của các vector sau:

$$\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}; \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}; \vec{d} = 3\vec{i}; \vec{e} = -4\vec{j}.$$

Bài 7. Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, biết rằng:

$$\vec{u} = (1; 3); \vec{u} = (4; -1); \vec{u} = (0; -1); \vec{u} = (1, 0); \vec{u} = (0, 0)$$

Bài 8. Trong mp Oxy cho $\vec{a} = (-1; 3)$, $\vec{b} = (2, 0)$. Tìm tọa độ và độ dài của các vector:

$$\text{a) } \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} \quad \text{b) } \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad \text{c) } \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

Bài 9. Cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vector sau:

$$\text{a) } \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}. \quad \text{b) } \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2 + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Bài 10. Cho $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{c} = (4; -6)$.

- Tìm tọa độ của vector $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.
- Tìm 2 số m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.
- Biểu diễn vector \vec{c} theo \vec{a}, \vec{b} .

III. Xác định điểm thỏa mãn một đẳng thức véc tơ, độ dài

Bài 1. Cho tam giác ABC với A(1;0); B(-3;-5); C(0;3)

- Xác định tọa độ điểm E sao cho $\vec{AE} = 2\vec{BC}$
- Xác định tọa độ điểm F sao cho $AF=CF=5$
- Tìm tập hợp điểm M biết: $|2(\vec{MA} + \vec{MB}) - 3\vec{MC}| = |\vec{MB} - \vec{MC}|$

Bài 2. Cho tam giác ABC với A(-1;3); B(2;4); C(0;1). Xác định tọa độ:

- Trọng tâm G
- Véc tơ trung tuyến AA_1
- Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 3. Cho hai điểm A(3;-5), B(1;0).

- Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\vec{OC} = -3\vec{AB}$.
- Tìm điểm D đối xứng của A qua C.
- Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Bài 4. Cho ba điểm A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0).

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB.

Bài 5. Cho ba điểm A(1; -2), B(0; 4), C(3; 2).

- Tìm tọa độ các vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$.
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Bài 6. Cho ba điểm A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -2).

a) Tìm tọa độ điểm D đối xứng của A qua C.

b) Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 7. Cho M(1+2t; 1+3t). Hãy tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Bài 8. Cho tam giác ABC với A(4;6); B(1;4); C(7; $\frac{3}{2}$)

a) CM: ΔABC vuông

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

c) Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn: $|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$

Bài 9. Trong mp Oxy cho A(1; -2) , B(0; 4) , C(3; 2)

a) Tìm tọa độ của các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC}

b) Tìm tọa độ trung điểm I của AB

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

d) Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Bài 10. Trong mp Oxy cho ΔABC có A (4; 3) , B(-1; 2) , C(3; -2).

a) Chứng minh rằng ΔABC cân. Tính chu vi ΔABC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .

Bài 11. Trong mp Oxy cho ΔABC có A (0; 2) , B(6; 4) , C(1; -1).

a) Chứng minh rằng ΔABC vuông. Tính diện tích ΔABC .

b) Gọi D (3; 1). Chứng minh 3 điểm B, C, D thẳng hàng.

c) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 12. Cho tam giác ABC với A(1;-2); B(0;4); C(3;2). Tìm tọa độ của:

a) Trọng tâm G của tam giác

b) Véc tơ trung tuyến ứng với cạnh BC

c) Điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

d) Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

e) Điểm M biết: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

f) Điểm N biết: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Bài 13. Cho tam giác ABC với A(-3;6); B(1;-2); C(6;3). Tìm tọa độ của:

a) Trọng tâm G

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp

c) Điểm M biết $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$

Bài 14. Cho tam giác ABC với $A(0;3)$; $B(4;6)$; $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Bài 15. Cho điểm $A(3;1)$

- Tìm tọa độ các điểm B, C sao cho OABC là hình vuông và điểm B nằm trong góc phần tư thứ nhất.
- Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông OABC.

Bài 16. Cho $M(1-2t; 1-3t)$. Hãy tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

IV. Vectơ cùng phương - Ba điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho $A(0;4)$; $B(3;2)$.

- Chứng minh $\overline{A, B, C}$ biết $C(-6-3t; 8+2t)$
- A, B, D không thẳng hàng biết $D(3;0)$. Tính chu vi ΔABD .

Bài 2. Cho $A(2;1)$; $B(6;-1)$. Tìm tọa độ:

- Điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.
- Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.
- Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

Bài 3. Cho ΔABC có $A(4; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -2)$.

- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 4. Trong mp Oxy cho ΔABC có $A(-3; 6)$, $B(9; -10)$, $C(-5; 4)$.

- Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .
- Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và tính bán kính đường tròn đó.

Bài 5. Cho $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(6; 0)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .
- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 6. Cho $A(0; 2)$, $B(6; 4)$, $C(1; -1)$. Tìm tọa độ các điểm M, N, P sao cho:

- Tam giác ABC nhận các điểm M, N, P làm trung điểm của các cạnh.
- Tam giác MNP nhận các điểm A, B, C làm trung điểm của các cạnh.

Bài 7. Cho $A(1;1)$; $B(3;3)$; $C(2;0)$

- Tính diện tích tam giác ABC.
- Tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Bài 8. Tìm điểm P trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

- $A(1;1)$ và $B(2;-4)$
- $A(1;2)$ và $B(3;4)$

Bài 9. Cho $M(4;1)$ và hai điểm $A(a;0)$; $B(0;b)$ với $a,b>0$ sao cho A,B,M thẳng hàng. Xác định tọa độ A và B sao cho:

- Diện tích ΔOAB lớn nhất.
- $OA+OB$ nhỏ nhất
- $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài 10. Cho $A(-1;-4)$; $B(3;4)$. Tìm tọa độ:

- Điểm M trên trục hoành sao cho A,B,M thẳng hàng.
- Điểm N trên trục tung sao cho A, B, N thẳng hàng.
- Điểm P khác điểm B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 3\sqrt{5}$.

Bài 11. Cho $A(1;3)$; $B(3;1)$; $C(2;4)$

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tìm tất cả các điểm M trên trục Ox sao cho góc AMB nhỏ nhất.

Bài 12. Tìm điểm P trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

- $A(1;2)$ và $B(3;4)$
- $A(1;1)$ và $B(2;-5)$

Bài 13. Tìm điểm P trên trục tung sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

- $A(1;1)$ và $B(-2;-4)$
- $A(1;1)$ và $B(3;-3)$

Bài 14. Tìm điểm P trên đường thẳng $(d): x+y=0$ sao cho tổng khoảng cách từ P tới A và B là nhỏ nhất, biết:

- $A(1;1)$ và $B(-2;-4)$
- $A(1;1)$ và $B(3;-2)$

Bài 15. Cho $M(1;4)$ và hai điểm $A(a;0)$; $B(0;b)$ với $a,b>0$ sao cho A,B,M thẳng hàng. Xác định tọa độ A và B sao cho:

- Diện tích ΔOAB lớn nhất.
- $OA+OB$ nhỏ nhất
- $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài 16. Cho $M(1;2)$ và hai điểm $A(a;0)$; $B(0;b)$ với $a,b>0$ sao cho A,B,M thẳng hàng. Xác định tọa độ A và B sao cho:

- Diện tích ΔOAB lớn nhất.
- $OA+OB$ nhỏ nhất
- $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài 17. Trong mp Oxy cho $A(0; 1)$, $B(4; 5)$

- Hãy tìm trên trục hoành 1 điểm C sao cho ΔABC cân tại C .
- Tính diện tích ΔABC .
- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 18. Trong mp Oxy cho $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(6; 0)$

- Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .
- Chứng minh rằng ΔABC vuông cân.
- Tính diện tích ΔABC .