CHUYÊN ĐỀ 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Lý thuyết

1) Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $a_1.x + b_1.y = c_1$ và $a_2.x + b_2.y = c_2$. Khi đó ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$(I)\ \begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$$

- Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_o;y_0)$ thì $(x_o;y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.

2) Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

B. Bài tập

Dạng 1. Giải hệ phương trình cơ bản và đưa về dạng cơ bản

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ 6x-3y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 5x+2y=14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-2y=14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x\sqrt{5}-(1+\sqrt{3})y=1 \\ (1-\sqrt{3})x+y\sqrt{5}=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,2x+0,1y=0,3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \\ x+y-10=0 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} (3x+2)(2y-3)=6xy \\ (4x+5)(y-5)=4xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+y)+3(x-y)=4 \\ (x+y)+2(x-y)=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2x-3)(2y+4)=4x(y-3)+54 \\ (x+1)(3y-3)=3y(x+1)-12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2y-5x}{3}+5=\dfrac{y+27}{4}-2x \\ \dfrac{x+1}{3}+y=\dfrac{6y-5x}{7} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+2)(y+3)-\dfrac{1}{2}xy=50 \\ \dfrac{1}{2}xy-\dfrac{1}{2}(x-2)(y-2)=32 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x+20)(y-1)=xy \\ (x-10)(y+1)=xy \end{cases}$

Dạng 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

Bài 1. Giải các hệ phương trình

CASESTUDY24H

a) $\begin{cases}\frac{3}{4}x-2y=1\\ \frac{-1}{2}x+y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{-2}{3}x-\frac{1}{2}y=1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}0,5x+0,25y=1\\ 2,5x+1,25y=5\end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2}\\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2-\sqrt{3})x-3y=2+5\sqrt{3}\\ 4x+y=4-2\sqrt{3}\end{cases}$

Dạng 3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{8}{x}+\frac{15}{y}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{2}{x+2y}+\frac{1}{y+2x}=3\\ \frac{4}{x+2y}-\frac{3}{y+2x}=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{3x}{x+1}-\frac{2}{y+4}=4\\ \frac{2x}{x+1}-\frac{5}{y+4}=9\end{cases}$

d) $\begin{cases}x^2+y^2=13\\ 3x^2-2y^2=-6\end{cases}$ e) $\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=16\\ 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-11\end{cases}$ f) $\begin{cases}|x|+4|y|=18\\ 3|x|+|y|=10\end{cases}$

g) $\begin{cases}2(x^2-2x)+\sqrt{y+1}=0\\ 3(x^2-2x)-2\sqrt{y+1}=-7\end{cases}$ h) $\begin{cases}5|x-1|-3|y+2|=7\\ 2\sqrt{4x^2-8x+4}+5\sqrt{y^2+4y+4}=13\end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=5\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{6}{x-2y}+\frac{2}{x+2y}=3\\ \frac{3}{x-2y}+\frac{4}{x+2y}=-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4\end{cases}$

Dạng 4. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}2x+3y=-2\\ 3x-2y=-3\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x+3y=6\\ 2x+y=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}9x+8y=6\\ 2x-y=2\end{cases}$

d) $\begin{cases}x-6y=17\\ 5x+y=23\end{cases}$ e) $\begin{cases}7x+4y=74\\ 3x+2y=32\end{cases}$ f) $\begin{cases}x-3y=6\\ -2x+6y=-12\end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2=0\\ 5x-y=11\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{b}{3}=-\frac{1}{3}\\ 4a-5b=10\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\\ x+y=10\end{cases}$

Bài 3. Giải các hệ phương trình

CASESTUDY24H

a) $\begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1 \\ x+y\sqrt{3}=\sqrt{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2} \\ x+(\sqrt{2}+1)y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\sqrt{2}-3y=1 \\ 2x+y\sqrt{2}=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1 \\ x+y\sqrt{3}=\sqrt{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x\sqrt{5}-(1+\sqrt{3})y=1 \\ (1-\sqrt{3})x+y\sqrt{5}=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$

Dạng 5. Giải và biện luận các hệ phương trình

A. Lý thuyết

Hệ phương trình $\begin{cases} a_1.x + b_1.y = c_1 \\ a_2.x + b_2.y = c_2 \end{cases}$ ($a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ khác 0)

- Vô nghiệm nếu $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
- Có nghiệm duy nhất nếu $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
- Có vô số nghiệm nếu $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

B. Bài tập

Bài 1. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx+y=3m-1 \\ x+my=m+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+my=3m \\ mx-y=m^2-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-my=1+m^2 \\ mx+y=1+m^2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y=3+2m \\ mx+y=(m+1)^2 \end{cases}$

Bài 2. Giải và biện luận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau theo tham số m

a) $\begin{cases} 2x+my=1 \\ mx+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx+4y=10-m \\ x+my=4 \end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=2 \\ mx-2y=1 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm (x, y) duy nhất thoả mãn (x>0; y<0).

Bài 4. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+2my=m+1 \\ x+(m+1)y=2 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm (x, y) duy nhất thoả mãn điểm M(x;y) nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Bài 5. Tìm giá trị của tham số m để cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2 \\ 3x+my=5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x;y) thoả mãn hệ thức $x+y=1-\frac{m^2}{m^2+3}$

CASESTUDY24H

Bài 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1\\x+(a-1)y=2\end{cases}$

a) Giải và biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo tham số a.

b) Khi hệ có nghiệm (x;y) duy nhất, lập hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với a. Từ đó, chứng tỏ M(x;y) nằm trên đường thẳng cố định.

c) Tìm giá trị nguyên của a để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x, y nguyên.

d) Tìm giá trị của a để hệ có nghiệm (x;y) duy nhất thoả mãn điều kiện x + y nhỏ nhất.

Bài 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2m+1\\2x-y=m-1\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 5

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x,y) thoả mãn x = 3y + 1

Bài 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+y=m+1\\x+my=3m\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 2.

b) Tìm m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Bài 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2m+1\\2x-y=m-1\end{cases}$ (I)

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x, y không phụ thuộc vào m.

Bài 10. Chứng minh rằng hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=2m+1\\2x-y=m-1\end{cases}$ luôn có nghiệm nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 11. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=1\\mx-y=-m\end{cases}$ (với m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào giá trị của m.

Bài 12. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x-my=0\\mx-y=m+1\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = -1.

b) Chứng tỏ rằng với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất nằm trên đường thẳng cố định.

Bài 13. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=2\\mx-y=1\end{cases}$

a) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm (x,y) thoả mãn x > 0 và y < 0.

CASESTUDY24H

b) Tìm giá trị lớn nhất cảu biểu thức S = 2x - y với (x,y) là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bài 14. Cho hệ phương trình: $1\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm (x,y) sao cho H = x - y + 1 có giá trị nhỏ nhất.

Bài 15. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx + 2y = 2m \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$

Bài 16. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = -2

b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

Bài 17. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + ay = 1 \\ -ax + y = a \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hệ luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi a.

b) Tìm a để hệ có nghiệm (x,y) sao cho x<1 ; y<1.

Bài 18. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$

Xác định m nguyên để hệ sau có nghiệm duy nhất (x; y) và x; y nguyên.

Bài 19. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ x + my = 3 \end{cases}$

Xác định m để hệ có nghiệm thỏa mãn x > 0, y > 0.

Bài 20. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + (m-4)y = 16 \\ (4-m)x - 50y = 80 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình.

b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất. Hãy tìm m để x + y > 1.

Bài 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (1+m)x - y = m + 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = $\frac{1}{2}$

b) Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn điều kiện x > y

Bài 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (2m+1)x + y = 2m - 2 \\ m^2 x - y = m^2 - 3m \end{cases}$

Trong đó m $\in$ Z; m $\neq$ 1. Xác định m để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

CASESTUDY24H

Bài 23. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+ay=1 \\ ax+y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} -ax+y=3 \\ |x+1|+y=2 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

b) Tìm các số nguyên m để hệ có nghiệm (x; y) là số nguyên.

c) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

Bài 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=3m-1 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

b) Trong trường hợp có nghiệm duy nhất, tìm các giá trị của m để tích x.y nhỏ nhất.

Bài 25. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 4x-4y+2z=1 \\ 8x+4y+z=8 \end{cases}$

a) Biểu thị x và y theo z.

b) Tìm GTNN và GTLN của thức A = x + y – z.

Bài 26. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} 2a+3b=5 \\ 3a-4c=6 \end{cases}$

Bài 27. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} -ax+y=3 \\ |x+1|+y=2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với a = 2

b) Tìm các giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 28. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 \\ 2x-y=m+5 \end{cases}$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà S = x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 29. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx+2my=m+1 \\ mx+(m+1)y=1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thì điểm M (x; y) luôn thuộc một đường thẳng khi m thay đổi.

b) Xác định m để điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất.

Bài 30. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+my=1 \\ mx+2y=1 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

b) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) với x, y là các số nguyên.

CASESTUDY24H

c) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x; y), điểm M (x, y) luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 31. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi a = 2.

b) Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm duy nhất.

CASESTUDY24H