

Dạng 4. Đại cương về hàm số bậc hai

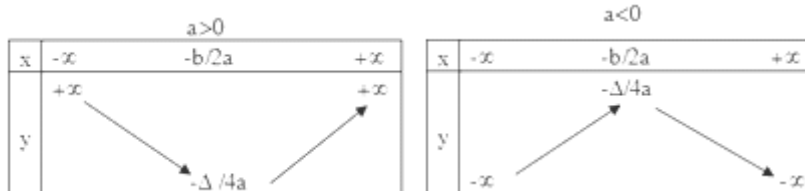
A. Lý thuyết

1. Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

2. Tính chất

Sự biến thiên:



3. Đồ thị

- Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là $I\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$.
- Parabol có bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

Chú ý: Để vẽ đường parabol ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

4. Lý thuyết tương giao - tiếp tuyến

Cho đồ thị (C): $y=f(x)$ và (P): $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- **Tọa độ giao điểm** nếu có là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = f(x) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$.
- **Phương trình hoành độ giao điểm:** $f(x) = ax^2 + bx + c$, nếu biến đổi về được dạng: $Mx^2 + Nx + P = 0$ thì:
 - + $\Delta < 0$: không có điểm chung.
 - + $\Delta = 0$: tiếp xúc nhau.
 - + $\Delta > 0$: cắt nhau tại 2 điểm.

Đặc biệt, nếu (C) là đường thẳng và khi $\Delta = 0$ thì đường thẳng là tiếp tuyến của (P).

- **Lập phương trình tiếp tuyến với (P):** $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) tại điểm

$A(x_A; y_A) \in (P)$ hoặc đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.

Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua A và có hệ số góc k:

$$y - y_A = k(x - x_A) \Rightarrow y = k(x - x_A) + y_A.$$

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (d) với (P) thì dùng điều kiện tiếp xúc:

$\Delta = 0$ để tìm ra k.

B. Bài tập

Bài tập xét sự biến thiên và đồ thị hàm số

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = x^2 - 6x$

b) $y = -x^2 + 4x + 5$

c) $y = 3x^2 + 2x - 5$

Bài 2. Cho (P): $y = -2x^2 - 4x + 6$

a) Vẽ (P).

b) Tìm x sao cho $y \geq 0$.

Bài 3. Cho (P): $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

a) Vẽ (P).

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}x^2 + x - m = 0$.

Bài 4. Cho (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$.

a) Vẽ (P).

b) Từ đồ thị (P) suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3|x| + 1$.

c) Xác định m để phương trình $y = 2x^2 - 3|x| + 1$ vô nghiệm, có 2 nghiệm, có 3 nghiệm, có 4 nghiệm.

Bài 5. Cho $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh nếu có số α sao cho $a.f(\alpha) < 0$ thì phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 hơn nữa $x_1 < \alpha < x_2$.

Bài 6. Xác định parabol (P) biết:

a) (P): $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm A(1; 0) và có trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$.

b) (P): $y = ax^2 + bx + 3$ đi qua điểm A(-1; 9) và có trục đối xứng $x = -2$.

c) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm A(0; 5) và có đỉnh I(3; -4).

d) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm A(2; -3) và có đỉnh I(1; -4).

e) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm A(1; 1), B(-1; -3), O(0; 0).

f) (P): $y = x^2 + bx + c$ đi qua điểm A(1; 0) và đỉnh I có tung độ bằng -1.

Bài 7. Tìm phép tịnh tiến biến đồ thị:

- a) (P): $y = x^2$ thành (P'): $y = x^2 - 8x + 12$.
 b) (P): $y = -3x^2$ thành (P'): $y = -3x^2 - 12x + 9$.

Bài 8. Tìm m để hàm số:

- a) $y = x^2 + 2mx + 5$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 b) $y = -x^2 - 4mx + 6$ luôn nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Bài 9. Tìm giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- a) $y = -x^2 + 2x + m - 5$ trên $[0; 3]$ bằng 4.
 b) $y = x^2 - 2mx + 3m - 1$ trên $[0; 1]$ bằng 1.

Bài 10. Xác định parabol (P): $y = ax^2 + c$ biết:

- a) Đi qua điểm A(2;3) và có giá trị nhỏ nhất là -2.
 b) Đỉnh là I(0;3) và một trong hai giao điểm của (P) với trục hoành là A(2;0)

Bài 11. Xác định parabol (P): $y = ax^2 + bx - 1$ biết rằng (P):

- a) Đi qua hai điểm M(1;2) và N(-1,3).
 b) Đi qua điểm A(2;1) và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{2}$.
 c) Đi qua điểm B(-1;2), đỉnh có tung độ bằng $-\frac{3}{2}$.

Bài 12. Xác định hàm số bậc hai (P): $y = -x^2 + bx + c$ biết rằng (P):

- a) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$ và cắt trục tung tại điểm A(0,3).
 b) Có đỉnh là I(-1;-2).
 c) Có hoành độ đỉnh là 2 và đi qua điểm M(-1;2).

Bài tập tương giao - tiếp tuyến

Bài 1. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau:

- a) $y = x - 1$; $y = x^2 - 2x - 1$
 b) $y = -x + 3$; $y = -x^2 - 4x + 1$
 c) $y = 2x - 5$; $y = x^2 - 4x + 4$
 d) $y = x^2 - 2x - 1$; $y = x^2 - 4x + 4$
 e) $y = 3x^2 - 4x + 1$; $y = -3x^2 + 2x - 1$
 f) $y = 2x^2 + x + 1$; $y = -x^2 + x - 1$

Bài 2. Tìm tọa độ giao điểm của:

- a) $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$
 b) $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x - 1$
 c) $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 + 4$
 d) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ và $y = x^2 - 2x + 1$

Bài 3. Chứng minh đường thẳng:

- a) $y = -x + 3$ cắt (P): $y = -x^2 - 4x + 1$.
 b) $y = 2x - 5$ tiếp xúc với (P): $y = x^2 - 4x + 4$.

Bài 4. Cho hàm số: $y=x^2-2x+m-1$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số:

- Không cắt trục Ox .
- Tiếp xúc với trục Ox .
- Cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt về bên phải gốc O .

Bài 5. Biện luận theo m số giao điểm của (d): $y = 2x + m$ với (P): $y = x^2 + x - 6$.

Bài 6. Cho (P): $y = x^2 - 4x + 3$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(4;1)$ biết rằng:

- d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- d tiếp xúc với (P).

Bài 7. Lập phương trình tiếp tuyến với (P): $y = x^2 + x - 1$.

- Tại điểm $A(-2;1)$.
- Đi qua điểm $B(-1;-5)$.

Bài 8. Cho (P): $y = x^2 - 3x + 2$. Lập phương trình tiếp tuyến của (P) biết rằng:

- Tiếp tuyến đó tạo với tia Ox một góc bằng 45° .
- Tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 2x + 1$.
- Tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Bài 9. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol

$$(P): y = x^2 + 4x + 8 \text{ và } (P'): y = x^2 + 8x + 4.$$

Bài 10. Xác định (P) biết (P) tiếp xúc với 3 đường thẳng $y = x - 5$; $y = -3x + 3$ và $y = 3x - 12$.

Bài 11. Chứng minh rằng các parabol $y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài 12. Chứng minh rằng các đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định.