

## BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Phân giác trong góc B cắt phân giác góc HAC tại E. Phân giác trong góc C cắt phân giác góc HAB tại M. BE cắt AC tại F, N là giao điểm của CM với AB.

Chứng minh rằng:  $BE \cdot BF + CM \cdot CN = BC^2$

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A ( $AB < AC$ ), đường cao AH. E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng:

a)  $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b)  $BE \cdot BC \cdot CF = AH^3$

c)  $BE \cdot \sqrt{CH} + CF \cdot \sqrt{BH} = AH \cdot \sqrt{BC}$

d)  $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$

e)  $\sqrt[3]{BE^2} + \sqrt[3]{CF^2} = \sqrt[3]{BC^2}$

f) Gọi D là điểm đối xứng của B qua H và gọi O là trung điểm BC. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt AC tại K. Chứng minh rằng:  $BK \perp AO$

**Bài 3.** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. D thuộc tia đối của HA. K là trung điểm BD. Chứng minh rằng:  $KC^2 - KB^2 = CA^2$

**Bài 4.** Tam giác ABC có M là trung điểm BC, qua B, C kẻ đt d, d' vuông góc với BC. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB, AC cắt d, d' tại D, E. Chứng minh rằng:  $MA \perp DE$ .

**Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A. M là trung điểm BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt trung trực AB tại E. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AM tại F. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc ME, cắt BE tại K. FK cắt BC tại I. Chứng minh rằng: I là trực tâm tam giác CEK.

**Bài 6.** Tam giác ABC vuông tại A. AH là đường cao. K thuộc AH. M là trực tâm tam giác KBC. KB cắt MC tại P, KC cắt MB tại Q. D, E thuộc đoạn KC, KB sao cho  $BD = BA$ ,  $CE = CA$ . BD cắt CE tại I. Chứng minh rằng:  $ID = IE$ .

**Bài 7.** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. O là trung điểm AB, kẻ  $AH \perp CO$ . AH cắt BC tại M. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt OD, OM tại P, Q. Chứng minh rằng:  $PC = PQ$ .

**Bài 8.** Hình chữ nhật ABCD ( $AB > AD$ ). E thuộc CD sao cho  $AE = AB$ . F thuộc AD sao cho  $EF \perp EA$ . Chứng minh rằng:  $AC \perp BF$ .

**Bài 9.** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH ( $AB > AC$ ). D nằm trong tam giác  $CD = CA$ . Điểm M thuộc BA sao cho góc ACD bằng 2 lần góc BDM. MD cắt AH tại N. Chứng minh rằng:  $DM = DN$

- Bài 10.** Tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. O là trung điểm AC. Kẻ  $AK \perp BO$ . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AK tại L. Đường trung trực BK cắt CL tại D. Chứng minh rằng:  $DK = DC$ .
- Bài 11.** Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Độ dài các cạnh của tam giác là các số nguyên và  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AH} = 1$ . Xác định độ dài các cạnh tam giác ABC.
- Bài 12.** Cho 2 tam giác vuông ABC, ADC chung cạnh huyền AC ( B,D nằm khác phía so với đường thẳng AC và  $AB > AD$ ). M nằm trên AB sao cho  $AM = AD$ . DM cắt BC tại N và  $HD \perp AC$ ,  $KC \perp AN$ . Chứng minh rằng:  $MHN = MCK$
- Bài 13.** Tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. D,E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên AB, AC. Chứng minh rằng:  $S_{ABC} \geq 4.S_{AED}$
- Bài 14.** Tam giác ABC nhọn, đường cao CK, trực tâm H. Gọi M là điểm trên CK sao cho góc  $AMB = 90^\circ$ . Chứng minh rằng:  $S_{AMB} = \sqrt{S_{ABC}} \cdot \sqrt{S_{ABH}}$
- Bài 15.** Tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. Điểm X thuộc đoạn CD, K thuộc đoạn AX sao cho  $BK = BC$ . Điểm T thuộc đoạn BX sao cho  $AT = AC$ , AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng:  $MK = MT$ .