

BÀI TẬP ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Bài 1: Cho x, y, z là ba số dương thỏa $4x + 9y + 16z = 49$. Chứng minh rằng:

$$T = \frac{1}{x} + \frac{25}{y} + \frac{64}{z} \geq 49$$

Bài 2: Cho $x > 0; y > 0$ và $x^2 + y^2 \leq x + y$. Chứng minh:

$$x + 3y \leq 2 + \sqrt{5}$$

Bài 3: Cho $a, b, c \geq 0; a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 30$$

Bài 4: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa $x + y + z \leq 1$. Chứng minh : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$

Bài 5: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

Bài 6: Chứng minh: $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(a+b+1)}$ với mọi số thực dương $a, b, c \geq 1$

Bài 7: Cho $a, b, c > 0$ và thỏa $abc = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

Bài 9: Cho $a, b > 0$ và thỏa $a^2 + b^2 = 9$. Chứng minh : $\frac{ab}{a+b+3} \leq \frac{3\sqrt{2}-3}{2}$

Bài 10: Cho a, b, c, d dương tùy ý. Chứng minh : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{p+q}{pa+qb} + \frac{p+q}{pb+qc} + \frac{p+q}{pc+qa}$

Bài 11 : Cho 4 số dương $a; b; c; d$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{b+d+a} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Bài 12 : Cho các số dương $a; b; c$ thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh : $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$

Bài 13 : Giả sử các số thực $x; y; z; t$ thỏa mãn điều kiện: $a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) = 1$ với $a; b$ là hai số dương cho trước. Chứng minh: $(x+z)(y+t) \leq \frac{a+b}{ab}$

Bài 14 : Cho các số thực dương $x; y; z; t$ thỏa mãn $xyzt = 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)} + \frac{1}{y^3(xz+zt+tx)} + \frac{1}{z^3(xt+ty+yx)} + \frac{1}{t^3(xy+yz+zx)} \geq \frac{4}{3}$$

Bài 15 : Cho $x_1; x_2; x_3; x_4$ dương thỏa điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Chứng minh :

$$\frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3} \geq \frac{1}{4}$$

Bài 16 : Cho bốn số dương $a; b; c; d$. Chứng minh:

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$$

Bài 17 : Cho $a; b; c$ là các số thực dương. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$

(Trích đề thi Olympic Toán Quốc Tế lần thứ 42, năm 2001)

Bài 18 : Cho $x; y; z \in \mathbb{R}^+$ thỏa $xy + yz + zt + tx = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x^3}{y+z+t} + \frac{y^3}{x+z+t} + \frac{z^3}{x+y+t} + \frac{t^3}{x+y+z} \geq \frac{1}{3}$$