



CASESTUDY 24H - GÓC CHIA SẺ KIẾN THỨC

-----o0o-----

NGUYỄN HỮU TUYẾN

MÔN HỌC: TOÁN 12

**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TẬP
CƠ BẢN & NÂNG CAO**



HÀ NỘI - 2018



MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU.....	
PHẦN SỐ HỌC	1
CHUYÊN ĐỀ 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ	1
Dạng 1. Các bài toán liên quan đến tính đơn điệu và tiếp tuyến	1
Dạng 2: Bài toán liên quan đến tiệm cận ĐTHS	6
CHUYÊN ĐỀ 2. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT	8
Dạng 1: Bài tập các phép biến đổi lũy thừa, hàm mũ và logarit.....	8
Dạng 2: Giải phương trình mũ, logarit	12
Dạng 3: Giải các bất phương trình mũ, logarit	14
CHUYÊN ĐỀ 3. NGUYÊN HÀM	16
Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa và các tính chất	17
Dạng 2. Tìm nguyên hàm theo công thức biến đổi.....	21
CHUYÊN ĐỀ 4. TÍCH PHÂN	22
Dạng 1: Tính toán giá trị tích phân cơ bản.....	22
Dạng 2: Ứng dụng của tích phân trong tính diện tích, thể tích	26
PHẦN HÌNH HỌC	27
CHUYÊN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH - THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	27
Dạng 1. Bài tập về hình chóp, tứ diện, lăng trụ.....	28
Dạng 2. Bài tập về khối nón, khối trụ.....	31
CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	31
Dạng 1. Bài tập cơ bản ứng dụng về điểm, đoạn thẳng, góc	31
Dạng 2. Bài toán về phương trình mặt phẳng và đường thẳng	33
Dạng 3. Bài toán về phương trình mặt cầu	34

LỜI NÓI ĐẦU

Thân gửi các em học sinh,

Cuốn sách là tổng hợp các bài tập cơ bản và nâng cao theo từng chương lý thuyết được học. Với mong muốn, các em có điều kiện luyện tập nhiều hơn nên Thầy tổng hợp lại các dạng bài đặc trưng này. Hy vọng các em sẽ tích cực học tập để đạt được kết quả tốt nhất.



CASESTUDY24H.COM

It's never too late to study ! - Góc chia sẻ kiến thức

MINH TUYẾN - Tel: 0164 9607 266 - Skype: nguyennhuu.tuyen1 - Email: nguyennhuutuyenbka@gmail.com



Share and share



knowledge

Không bao giờ là quá muộn cho việc học tập.

Cùng nhau chia sẻ phương pháp học tập và nâng tầm hiểu biết cùng Casestudy24h.



CASESTUDY24H.COM

It's never too late to study ! - Góc chia sẻ kiến thức



Các em học sinh lớp 12 thân mến!

Vậy là chặng đường dài học tập với 12 năm sắp kết thúc. Và sắp tới đây, các em sẽ phải đương đầu với những thử thách mới trong các KỲ THI. Một khoảng thời gian ngắn nhưng đầy áp lực, mệt mỏi, nhiều lo lắng, hồi hộp ... đôi lúc khiến chúng ta muốn TỪ BỎ.

Thế nhưng, các em hãy KIÊN TRÌ, NỖ LỰC & CỐ GẮNG vì:

>>>> Tương lai tươi sáng của bản thân

>>>> Niềm mong mỏi của Gia đình

Thà để giọt mồ hôi lăn trên má, còn hơn để giọt nước mắt rơi trong phòng thi!



MINH TUYẾN - Tel: 093 2697 054 - Skype: nguyennhuu.tuyen1 - Email: casestudy24h@gmail.com



Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ là: Chọn 1 câu đúng

- A. $y = x - \frac{7}{3}$ B. $y = -x + \frac{7}{3}$ C. $y = -x - \frac{7}{3}$ D. $y = \frac{7}{3}x$

Câu 9: Phương trình $x^3 - 3x = m^2 + m$ có 3 nghiệm phân biệt khi:

- A. $-2 < m < 1$ B. $-1 < m < 2$ C. $m < 1$ D. $m > -21$

Câu 10: Cho (C_m) là đồ thị hàm số $y = x^4 - (2m+1)x^2 + 2m+1$. (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì điều kiện của m là

- A. $m > -\frac{1}{2}$ B. $0 \neq m > -\frac{1}{2}$ C. $m < \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$

Câu 11: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

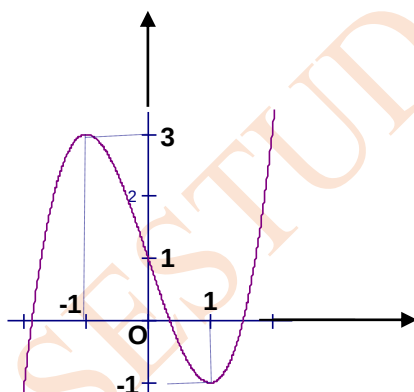
Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng ?

- A. -8. B. 8 C. 5 D. -5

Câu 12: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Điểm $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = 0$, Δ là đường thẳng qua M và có hệ số góc k . Xác định k để Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt

- A. $k = -3$ B. $k > 1$ C. $k > -3$ D. $k < 1$

Câu 13: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Chọn 1 câu đúng.



- A. $-2 \leq m < 2$ B. $-1 < m < 3$ C. $-2 < m < 3$ D. $-2 < m < 2$

Câu 14: Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2x$ là:

Chọn 1 câu đúng

- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 15: Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ với trục Oy. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị trên tại điểm M là: Chọn 1 câu đúng

- A. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ B. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ C. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ D. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

Câu 16: Giá trị của m để đường thẳng $y = m - 2x$ cắt đường cong $y = \frac{2x+4}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt là:

- A. $m < 16$ B. $m < -4; m > 4$ C. $-4 < m < 4$ D. $m > 4$

Câu 17: Giá trị của m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đường cong $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn AB ngắn nhất là:

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m = -2$

Câu 18: Cho hàm số $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. Số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox bằng

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 19: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là: Chọn 1 câu đúng

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 20: Giá trị của m để đường cong $y = (x-1)(x^2 + x + m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là:

- A. $m \in \left(-2; \frac{1}{4}\right)$ B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \setminus \{-2\}$
C. $m \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ D. $m \in \left(-\frac{1}{4}; 2\right)$

Câu 21: Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x$ đi qua điểm $M(1;0)$ là:

- A. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \end{cases}$

Câu 22: Đồ thị hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{1-x}$ có 2 điểm cực trị nằm trên đường thẳng $y = ax + b$ với: $a + b = ?$

- A. 4 B. -4 C. 2 D. -2

Câu 23: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Có bao nhiêu tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 2

Câu 24: Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng:

- A. 0 B. 3 C. -4 D. -3

Câu 25: Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng: Chọn 1 câu đúng

- A. 0 B. Đáp số khác C. 2 D. -2

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ (C). Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 3x - 1$

- A. $y = 3x + 1$ B. $y = 3x - \frac{29}{3}$ C. Câu A và B đúng D. $y = 3x + 20$

Câu 27: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{2x - 2}$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$

A. $m = 1$

B. $m = \frac{-1-2\sqrt{2}}{2}; m = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$

C. $m = -1$

D. $m = 2$

Câu 28: Đường thẳng $y = 3x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 2$ khi m bằng

A. 1 hoặc -1

B. 4 hoặc 0

C. 2 hoặc -2

D. 3 hoặc -3

Câu 29: Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Trên (C) có bao nhiêu điểm có tọa độ là những số nguyên dương

A. 2 điểm

B. 3 điểm

C. 4 điểm

D. 5 điểm

Câu 30: Từ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Xác định m để phương trình $x^3 - 3x + 1 = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt

A. $1 < m < 2$

B. $-1 < m < 7$

C. $0 < m < 4$

D. $0 < m < 4$

Câu 31: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình

là:

Chọn 1 câu đúng

A. $y = -x - 3$

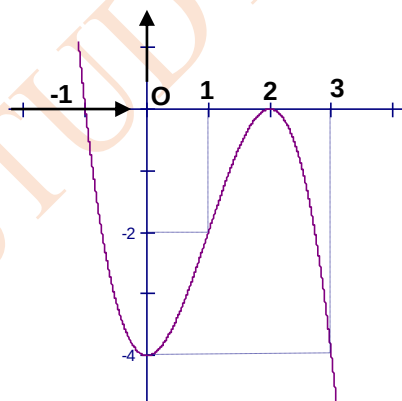
B. $y = x - 1$

C. $y = x + 2$

D. $y = -x + 2$

Câu 32: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Với giá trị nào của m thì phương trình

$x^3 - 3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Chọn 1 câu đúng.



A. $m = -4 \vee m = 0$

B. $m = -4 \vee m = 4$

C. $m = 4 \vee m = 0$

D. Một kết quả khác

Câu 33: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tìm m để phương trình: $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có hai nghiệm phân biệt? Chọn 1 câu đúng.

A. $m > 3 \vee m = 2$

B. $m > 3 \vee m < 2$

C. $m < 2$

D. $m < 3$

Câu 34: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Tìm m để parabol có phương trình $y = -\frac{3}{4}x^2 + 4 - m^2$ tiếp xúc với (C)

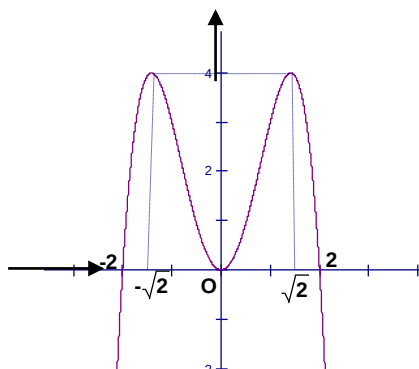
A. $m = 0$

B. $m = -1$

C. $m = 2$

D. $m = 1$

Câu 35: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt? Chọn 1 câu đúng.



A. $0 < m < 4$

B. $0 \leq m \leq 6$

C. $2 < m < 6$

D. $0 \leq m < 4$

Câu 36: Cho đường cong $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là: Chọn 1 câu đúng

A. $y = 8x + 1$

B. $y = 3x + 1$

C. $y = -8x + 1$

D. $y = 3x - 1$

Câu 37: Cho hàm số $y = x^3 - 8x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là: Chọn 1 câu đúng

A. 0

B. 2

C. 3

D. 1

Câu 38: Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d_m): y = mx$. (C) và (d_m) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt thì

A. $m \neq 9$

B. $m < 0$

C. $m > 0; m \neq 9$

D. $m > 0$

Câu 39: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C), mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2007$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$

B. -1

Số tiếp tuyến đi qua điểm A (1; -6) của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ là:

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Câu 40: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM

A. $M(2;3)$

B. Không có điểm M nào

C. $M(0;1)$

D. $M_1(2;3); M_2(0;1)$

Câu 41: Các đồ thị của hai hàm số $y = 3 - \frac{1}{x}$ và $y = 4x^2$ tiếp xúc với nhau tại điểm M có hoành độ là.

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $x = 2$

D. $x = 1/2$

Câu 42: Gọi M và N là giao điểm của đường cong $y = \frac{7x+6}{x-2}$ và đường thẳng $y = x + 2$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn MN bằng: Chọn 1 câu đúng

A. $\frac{7}{2}$

B. 3

C. $-\frac{7}{2}$

D. 7

Câu 43: Tiếp tuyến của parabol $y = 4 - x^2$ tại điểm (1;3) tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích tam giác vuông đó là

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{25}{2}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{25}{4}$

Câu 44: Giá trị của m để đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là:

A. $m < \frac{-1}{2}; m > \frac{1}{2}$

B. $\frac{-1}{2} < m < 0$

C. $\frac{-1}{2} < m < \frac{1}{2}$

D. $0 < m < \frac{1}{2}$

Câu 45: Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$. Chọn 1 câu đúng

A. Song song với đường thẳng $x = 1$.

B. Song song với trục hoành

C. Có hệ số góc dương

D. Có hệ số góc bằng -1

Câu 46: Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến song song với trục hoành của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ bằng: Chọn 1 câu đúng

A. -1

B. 1

C. A và B đều đúng

D. Đáp số khác

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tiệm cận ĐTHS

Câu 1: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$. Tìm các điểm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó với (C) vuông góc với tiệm cận xiên

A. $(2; 12)$

B. $(0; 0)$

C. $(1 + \sqrt{3}; 5 + 3\sqrt{3})$ và $(1 - \sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})$

D. $(-2; 0)$

Câu 2: Cho (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất

A. $(1; 1)$

B. $(1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$

C. $(1 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$

D. $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

A. $(0; \frac{3}{2}), (1; -1)$

B. $(-1; \frac{5}{3}); (3; 3)$

C. $(3; 3), (1; 1)$

D. $(4; \frac{5}{2}); (3; 3)$

Câu 4: Hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Tìm các điểm trên (C) có tổng khoảng cách của 2 tiệm cận đến (C) bằng 4

A. $(2; 5), (0; -1), (4; 3), (-2; 1)$

B. $(2; 5), (0; -1)$

C. $(4; 3), (-2; 1)$

D. $(2; 5), (4; 3)$

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x^2-4}$

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm

- A. (1; 2) B. (2; 1) C. (1; -1) D. (-1; 1)

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{3}{x-2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$

- A. Nhận điểm $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là tâm đối xứng
 B. Nhận điểm $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ làm tâm đối xứng
 C. Không có tâm đối xứng
 D. Nhận điểm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

Câu 9: Cho đường cong (C): $y = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x}$. Tìm phương án đúng:

- A. (C) chỉ có tiệm cận đứng B. (C) có tiệm cận xiên
 C. (C) có hai tiệm cận D. (C) có ba tiệm cận

Câu 10: Để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3mx+1}{x-m}$ có tiệm cận xiên thì m phải thỏa mãn:

- A. $m \neq \pm 2$ B. $m \neq 0$ C. $m \neq \pm 1$ D. $m \neq \pm 4$

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu tiệm cận:

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$ có bao nhiêu tiệm cận:

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 2

Câu 13: Cho đường cong $y = \frac{2x+3}{x-1}$ (C) và 3 điểm A, B, C nằm trên (C) có hoành độ tương

ứng là 1,35; - 0,28; 3,12. Giả sử d_1, d_2, d_3 tương ứng là tích các khoảng cách từ A, B, C đến hai tiệm cận của (C). Lựa chọn đáp án đúng.

- A. $d_2 = 3$ B. $d_1 = 4$
 C. Cả ba phương án kia đều sai D. $d_3 = 5$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) có hai điểm phân biệt P, Q tổng khoảng cách từ

P hoặc Q tới hai tiệm cận là nhỏ nhất. Khi đó PQ^2 bằng:

- A. 32 B. 50 C. 16 D. 18

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C). Đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại P, Q thì

trung điểm E của đoạn thẳng PQ thuộc đường thẳng:

- A. $y = x + 1$ B. $y = 2x + 1$ C. $y = x - 1$ D. $y = 2x - 1$

Câu 16: Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận:

- A. $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ B. $y = \frac{1}{x+1}$ C. $y = \frac{2}{x+2}$ D. $y = \frac{5x}{2-x}$

Câu 17: Cho hàm số $y = 5x + 3 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên bên trái là:

- A. $y = 5x + 8$ B. $y = 4x + 8$ C. $y = 4x + 5$ D. $y = 4x$

Câu 18: Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ là:

- A. $y = 1$ và $x = -2$ B. $y = x+2$ và $x = 1$ C. $y = 1$ và $x = 1$ D. $y = -2$ và $x = 1$

Câu 19: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{1+x}$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

CHUYÊN ĐỀ 2. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Dạng 1: Bài tập các phép biến đổi lũy thừa, hàm mũ và logarit

A. Lũy Thừa

Câu 1: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} \cdot 10^{-2} - (0,2)^0}$ b) $\frac{2 \cdot 4^{-2} + (3^{-2})^3 \cdot (\frac{1}{9})^{-3}}{5^{-3} \cdot 25^2 + (0,7)^0 \cdot (\frac{1}{2})^{-2}}$
- c) $(\frac{1}{3})^{-10} \cdot 27^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}$ d) $(x^3 + y^{-6}) : (x + \frac{1}{y^2})$
- e) $\frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} - \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}}$ f) $\frac{1}{4} (x \cdot a^{-1} - a \cdot x^{-1}) \cdot \frac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-1} + x^{-1}} - \frac{a^{-1} + x^{-1}}{a^{-1} - x^{-1}}$

Câu 2: Tính các biểu thức sau:

- a) $\sqrt[5]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}} : \sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8}}}$ c) $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}}$
- d) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3 \cdot \sqrt{a}}} : a^{\frac{1}{2}}$ e) $\sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}$ f) $\sqrt[5]{\frac{b}{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$

$$g) \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$$

$$h) \left(\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \right) \left((\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)^{-1}$$

Câu 3: Cho hai số $a, b > 0$. Tính các biểu thức sau:

$$a) (2a^{\frac{3}{4}} + 3a^{\frac{3}{4}})^2$$

$$b) (a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}})(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}})(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}})$$

$$c) (\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1)(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)$$

$$d) a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + \frac{(1-a)(1-a^{-\frac{1}{2}})}{1+\sqrt{a}}$$

$$e) \frac{a^{\frac{4}{3}}(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}$$

$$f) \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$$

$$g) (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab})$$

$$h) (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)$$

$$i) \left[\frac{a^4 + a^3b + ab^3 + a^4}{a^2 + 2ab + b^2} (a+b) + \frac{3b(a^2 - b^2)}{a^{-1}(a-b)} \right]^{-\frac{1}{3}} : (a+b)^{-1}$$

$$j) \frac{(1 - (\frac{a}{b})^{-2})a^2}{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2 + 2\sqrt{ab}}$$

$$k) \frac{a^{-1} + (b+c)^{-1}}{a^{-1} - (b+c)^{-1}} : \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) (a+b+c)^{-2}$$

Câu 4: Cho biết $4^x + 4^{-x} = 23$, hãy tính $2^x + 2^{-x}$.

Câu 5: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) (a+b - \frac{4ab}{a+b}) : (\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2})$$

$$b) \left(\frac{a^{-2} + b^{-2}}{(a+b)^2} + \frac{2(a^{-1} + b^{-1})}{(a+b)^3} \right) : (ab)^{-2}$$

$$c) \frac{a^6 + \sqrt{b^3}}{a^2 + \sqrt{b}} (a^4 - b)^{-1} + \left(\frac{a^2 + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}} \right)^{-1} - \frac{a^2\sqrt{b}}{a^4 - b}$$

$$d) \left(\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right) \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$$

$$e) \left(\frac{\sqrt{2}}{(1-a^2)^{-1}} + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{a^{-2}} \right) : \left(\frac{a^{-2}}{1+a^{-2}} \right)^{-1}$$

$$f) \left[\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right] \cdot \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$$

$$h) \left(\frac{1}{a+a\sqrt{b}} + \frac{1}{a-a\sqrt{b}} - \frac{(b+1)^2}{1-b^2} \right) \left(1 - \frac{1}{b} \right)$$

$$i) \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Câu 6: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = (4^{\frac{1}{3}} - 10^{\frac{1}{3}} + 25^{\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{1}{3}})$$

$$b) B = \frac{x \cdot y^{\frac{1}{2}} - y \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$$

$$c) C = \frac{(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}})(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}})}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab}$$

$$d) D = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} + (ax)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\frac{x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{x - a} \right]^2$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E &= \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) & \text{f) } F &= \left[\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right]^2 \\ \text{g) } G &= \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a-b} - \frac{a}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \right] : \left[a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^{-1} \right] \\ \text{h) } H &= \left[\frac{2a + b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{3a} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right] \\ \text{i) } I &= a^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{a + \sqrt{ab}} \right]^5 \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \\ \text{j) } J &= \frac{1}{a^2} \sqrt{(a^6 + 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 + b^6)^{\frac{2}{3}}} + \left[\frac{(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^3 - 2a^2 - b^2}{a^2 + (b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^3 + 2b^2} \right]^{-3} \\ \text{k) } K &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ với } a, b > 0 \end{aligned}$$

Câu 7: Cho 2 số $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ và $b = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính $a + b$

Câu 8: Rút gọn biểu thức $A = \frac{2a\sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ $a < 0 ; b < 0$

Câu 9: Cho $1 \leq x \leq 2$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

Câu 10: Cho ba số dương thỏa $a + b = c$. Chứng minh rằng: $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$

Câu 11: Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, chứng minh rằng nếu c là cạnh lớn nhất thì:

$$a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}} > c^{\frac{3}{4}}$$

Câu 12: Cho $a, b \geq 0$ và m, n là hai số nguyên dương thỏa $m \geq n$. Chứng minh rằng:

$$(a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$$

Câu 13: Cho $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$

a) Chứng minh rằng nếu $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$

b) Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2003}{2005}\right) + f\left(\frac{2004}{2005}\right)$

Câu 14: Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 - 4x + 3)^{-2}$

b) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{1/4}$

c) $y = (x^2 + x - 6)^{-1/3}$

d) $y = (x^3 - 8)^{\pi/3}$

Câu 15: So sánh các cặp số sau:

a) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{5}/2}$ và $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{10}/3}$

b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{10}/4}$ và $\left(\frac{4}{7}\right)^{\sqrt{5}/2}$

d) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}$

e) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ và $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{\sqrt{3}}$

B. LOGARIT

Câu 1: Tính

a) $\log_2 4\sqrt[3]{16}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3}$

c) $\log_{\sqrt{2}} 8\sqrt[5]{32}$

d) $\log_a \sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

e) $\log_3(\log_2 8)$

Câu 2: Tính

a) $2^{\log_8 3}$

b) $49^{\log_7 2}$

c) $25^{3\log_5 10}$

d) $64^{2\log_2 7}$

e) $4^{2+\log_2 3}$

f) $10^{3\log_{10} 8}$

g) $((0,25)^{3\log_2 5})$

h) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_8 5}} + 49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$

i) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$

Câu 3: Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $a^{\log_{\sqrt{a}} b} = b^2$

Câu 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$

b) $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$

c) $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$

d) $\frac{1 - (\log_a b)^3}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \left(\frac{a}{b}\right)}$

e) $\lg \lg 1^\circ + \lg \lg 2^\circ + \dots + \lg \lg 89^\circ$

f) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

Câu 5: Cho $\log_2 3 = a$; $\log_2 5 = b$.

Tính các số sau: $\log_2 \sqrt{3}$, $\log_2 \sqrt[3]{135}$, $\log_2 180$, $\log_3 37,5$, $\log_3 \sqrt{1875}$, $\log_{15} 24$, $\log_{\sqrt{10}} 30$

Câu 6: a) Cho $\log_5 3 = a$, tính $\log_{25} 15$

b) Cho $\log_9 6 = a$, tính $\log_{18} 32$

Câu 7: Cho $\lg 2 = a$, $\lg 7 = b$, tính $\lg 56$

Câu 8: Cho $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$, tính $\log_{25} 24$

Câu 9: Cho $\log_{25} 7 = a$, $\log_2 5 = b$ hãy tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$

Câu 10: Chứng minh rằng $\log_{18} 6 + \log_2 6 = 2\log_{18} 6 \cdot \log_2 6$

Câu 11: a) Cho $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$ tính $\log_{30} 8$

b) Cho $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$ tính biểu thức $A = \log_{25} 24$

c) Cho $\log_{45}147 = a, \log_{21}75 = b$, tính biểu thức $A = \log_{49}75$

Câu 12: Cho $\log_{27}5 = a, \log_87 = b, \log_23 = c$. Tính $\log_635$ theo a, b, c

Câu 13: Cho $\log_23 = a, \log_35 = b, \log_72 = c$. Tính $\log_{140}63$ theo a, b, c

Câu 14: Cho $a^2 + b^2 = 7ab, a > 0, b > 0$, chứng minh rằng: $\lg\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$

Câu 15: Cho $a^2 + 4b^2 = 12ab, a > 0, b > 0$, chứng minh rằng:

$$\lg(a+2b) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$$

Câu 16: a) Cho $x^2 + 4y^2 = 12xy, x > 0, y > 0$, chứng minh rằng

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg x + \lg y)$$

b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $4a^2 + 9b^2 = 4ab$ và số $c > 0, c \neq 1$, chứng minh rằng:

$$\log_c \frac{2a+3b}{4} = \frac{\log_c a + \log_c b}{2}$$

Câu 17: Cho $\log_{12}18 = a, \log_{24}54 = b$, chứng minh rằng $ab + 5(a-b) = 1$

Câu 18: Cho $\log_{aba} = 2$, tính biểu thức $A = \log_{ab} \frac{b}{\sqrt{a}}$

Câu 19: Chứng minh rằng: a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ b) $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_{ab} a$

$$c) \log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d = \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abcd} d}$$

Câu 20: Cho $a, b, c, N > 0, c \neq 1$ thỏa mãn: $b^2 = ac$. Chứng minh rằng: $\frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}$

Câu 21: Cho $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}, z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$. Chứng minh rằng: $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$

Câu 22: So sánh các cặp số sau:

a) $\log_4 3$ và $\log_5 6$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ và $\log_{\frac{1}{5}} 3$

c) $\log_5 4$ và $\log_4 5$

d) $\log_2 31$ và $\log_5 27$

e) $\log_5 9$ và $\log_3 11$

f) $\log_7 10$ và $\log_5 12$

g) $\log_5 6$ và $\log_6 7$

h) $\log_n(n+1)$ và $\log_{(n+1)}(n+2)$

Câu 23: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

a) $y = \log_6 \frac{3x+2}{1-x}$

b) $y = \sqrt{\lg x + \lg(x+2)}$

c) $y = \sqrt{\lg(x-1) + \lg(x+1)}$

Câu 24: Cho $a > 1$. Chứng minh rằng: $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$.

Từ đó suy ra: $\log_{17}19 > \log_{19}20$

Dạng 2: Giải phương trình mũ, logarit

A. Lý thuyết

1. Các phương pháp giải thường sử dụng cho phương trình mũ

- **Phương pháp 1:** Biến đổi phương trình về dạng cơ bản: $a^M = a^N$

- **Phương pháp 2:** Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số
- **Phương pháp 3:** Biến đổi phương trình về dạng tích số $A.B = 0$..
- **Phương pháp 4:** Nhẩm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất (thường là sử dụng công cụ đạo hàm).

2. Các phương pháp giải thường sử dụng cho phương trình logarit

- **Phương pháp 1:** Biến đổi phương trình về dạng cơ bản : $\log_a M = \log_a N$
- **Phương pháp 2:** Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số.
- **Phương pháp 3:** Biến đổi phương trình về dạng tích số $A.B = 0$...
- **Phương pháp 4:** Nhẩm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất. (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

B. Bài tập áp dụng

Bài 1: Giải các phương trình mũ

Bài 2: Giải các phương trình logarit:

1/. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

2/. $\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_4 (2^{x+1} - 2) = 1$

3/. $\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x + 2 = 0$

4/. $\log_{3x} (9x) + \log_x (3x) = 1$

5/. $x \cdot \log_5 3 + \log_5 (3^x - 2) = \log_5 (3^{x+1} - 4)$

6/. $4^{\log_3 x} + x^{\log_3 2} = 6$

7/. $\log_3 (x^2 - x - 5) = \log_3 (2x + 5)$

8/. $\log_3^2 x + (x - 12) \log_3 x + 11 - x = 0$

9/. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$

10/. $\log_2 \sqrt{x+4} = \log_2 (2 + \sqrt{x-4})$

11/. $\sqrt{\log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 x + 2} = \log_2 x^2 - 2$

12/. $\log_2 x \cdot \log_3 x + x \cdot \log_3 x + 3 = \log_2 x + 3 \log_3 x + x$

13/. $3 \cdot \log_3 (x+2) = 2 \cdot \log_2 (x+1)$

14/. $x^{\log_3 4} = x^2 \cdot 2^{\log_3 x} - 7 \cdot x^{\log_3 2}$

15/. $\log_2^2 (4x) - \log_{\sqrt{2}} (2x) = 5$

16/. $\log_3 (\log_{27} x) + \log_{27} (\log_3 x) = \frac{1}{3}$

17/. $\sqrt{\log_3 x + 2} = 4 - \log_3 x$

18/. $\log_2 x \cdot \log_3 x + 3 = 3 \cdot \log_3 x + \log_2 x$

19/. $2 \cdot \log_4^2 x = \log_2 x \cdot \log_2 (\sqrt{x-7} + 1)$

20/. $\log_3 (2^x - 2) + \log_3 (2^x + 1) = \log_3 (2^{x+2} - 6)$

$$21/. \log_8^2 \frac{x^2}{2} + \log_2(8x^2) = 8$$

$$22/. 6.9^{\log_2 x} + 6.x^2 = 13.x^{\log_2 6}$$

$$23/. \log_2^2 x + \log_2 x \cdot \log_2(x-1) + 2 = 3.\log_2 x + 2.\log_2(x-1)$$

$$24/. 3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18$$

$$25/. x.\log_2^2 x - 2(x+1).\log_2 x + 4 = 0$$

Bài 2: Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx)$ có 1 nghiệm duy nhất.

Bài 3: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

Bài 4: Tìm m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Bài 5: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2).\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 27$.

Bài 2: Giải các hệ phương trình logarit

$$1/. \begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

$$2/. \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2 + 6) = 4 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$$

$$3/. \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$4/. \begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2^{\log_2 3} \end{cases}$$

$$5/. \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x+y) - \log_5(x-y) = 1 \end{cases}$$

$$6/. \begin{cases} x + \log_2 y = 4 \\ 2x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$7/. \begin{cases} \log_3 x + 2^{\log_2 y} = 3 \\ x^y = 9 \end{cases}$$

$$8/. \begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$9/. \begin{cases} \log_x(2x + y - 2) = 2 \\ \log_y(2y + x - 2) = 2 \end{cases}$$

$$10/. \begin{cases} 3.x^{\log_2 y} + 2.y^{\log_2 x} = 10 \\ \log_4 x^2 + \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$11/. \begin{cases} xy = 32 \\ \log_y x = 4 \end{cases}$$

$$12/. \begin{cases} \log_2(xy) = 4 \\ \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Dạng 3: Giải các bất phương trình mũ, logarit

Bài 1: Giải các bất phương trình sau

$$1) 5^x < 25^{\frac{1}{x}} \quad 2) 5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4} \quad 3) 5^x - 3^{x+1} \geq 2(5^{x-1} - 3^{x-2}) \quad 4) 3^{x+3} 7^{x+3} \leq 3^{2x} 7^{2x}$$

$$5) 2^{x+3} - 5^x < 7.2^{x-2} - 3.5^{x-1} \quad 6) 64.3^{\sqrt{x-8}} - 6^{\sqrt{x-8}} \geq 0 \quad 7) (\sqrt[3]{2})^{x^2-6x-4} - (\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1)^x \geq 0$$

$$8) (3, 24)^{2\sqrt{x}-5} \geq \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1} \quad 9) 6^{2x+4} - 3^{3x} \cdot 2^{x+8} > 0$$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

$$1) 9^{x+1} + 3^{x+2} > 18 \quad 2) 9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1} \quad 3) 7^{-x} - 3 \cdot 7^{x+1} > 4 \quad 4) 2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$$

$$5) 5 \cdot 2^x < 7 \cdot \sqrt{10^x} - 2 \cdot 5^x \quad 6) (\sqrt{2})^{3x} + (2\sqrt{2})^x \geq 2 \cdot 4^x \quad 7) 2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} \geq 3^{2x^2-6x+3}$$

$$8) \frac{3^x}{2^x - 3^x} < 2 \quad 9) \frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1} \quad 10) \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau

$$1) 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3 \quad 2) 2 \cdot 3^x + 9 \cdot 4^x \geq 12^x + 18 \quad 3) 3^x \leq 7^{\frac{1}{x}} + 2$$

$$4) \frac{4^{-x} - 1}{x - 1} \leq 1 \quad 5) \frac{4 \cdot 2^{-x} - x - 1}{2^x - 3^x} < 0$$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 1) \leq 1 \quad 2) \log_{0,1}(x^2 + x + 2) > \log_{0,1}(x + 3) \quad 3) \log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$$

$$4) \log_3(2 - x) < \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) \quad 5) \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4 - 3x} < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2 - x^2} \quad 6) \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3}\right) < 0$$

$$7) \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2\log_5(x - 4) < 0 \quad 8) \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(2 - x)\right) < 2 \quad 9) \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1 + x} - x) < 2$$

$$10) \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geq 0 \quad 11) \log_3^2(2 - x) \leq \frac{1}{4} \quad 12) 2\log_2(x - 1) > 1 + \log_2(5 - x)$$

$$13) \log_2(9^{x-1} + 7) - 2 < \log_2(3^{x-1} + 1) \quad 14) \log_4(x^2 - 7x + 12)^2 < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x - 2) + \log_2|x - 4| - 1$$

$$15) \log_x(x + 1) < \log_{\frac{1}{x}}(2 - x) \quad 16) 10 - x^{\lg 5} < 5^{\lg x} < 50 - x^{\lg 5} \quad 17) \log_4 x^2 + 2 \cdot \log_{x^2} \frac{1}{4} < -1$$

$$18) \log_3(16^x - 2 \cdot 12^x) \leq 2x + 1 \quad 19) \log_x(\log_2(4^x - 12)) \leq 1 \quad 20) \log_x(\log_3(9^x - 6)) \geq 1$$

Bài 5: Giải các bất phương trình sau

$$1) \lg(10x) \log_2 x < 2 \log_2 10 \quad 2) 2 \log_3 x - \log_x 27 \leq 5 \quad 3) \log_{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1 - 4 \log_{\frac{1}{2}}^2 x} < 1$$

$$4) \log_x^2 \sqrt{5} - \log_x 5\sqrt{5} + 1, 25 < 0 \quad 5) \log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+2} - 9) > 3 \quad 6) \sqrt{\log_2 x} + 2\sqrt{\log_x 2} \geq 3$$

Bài 6: Giải các bất phương trình sau

$$1) \frac{x-5}{\log_3(x-2)} \geq 0 \quad 2) \frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 0 \quad 3) \frac{\lg(4x^2+1)}{\lg 2x} \geq 1$$

$$4) \frac{1}{\log_3(x-2)} < \frac{1}{2 \log_9 \sqrt{x^2+6x+9}} \quad 5) \frac{2 + \log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}$$

CHUYÊN ĐỀ 3. NGUYÊN HÀM

A. Lý thuyết

	u là hàm số theo biến x, tức là $u = u(x)$	*Trường hợp đặc biệt $u = ax + b, a \neq 0$
*Nguyên hàm của các hàm số đơn giản		
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	
$\int k \cdot dx = k \cdot x + C$, k là hằng số	$\int k \cdot du = k \cdot u + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} dx = -\frac{1}{u} + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} du = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$
*Nguyên hàm của hàm số mũ		
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$	$\int e^{-u} du = -e^{-u} + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$
*Nguyên hàm của hàm số lượng giác		
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos u \cdot du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin u \cdot du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot g(ax+b) + C$

Một số ví dụ trong trường hợp đặc biệt

*Trường hợp đặc biệt $u = ax + b$	Ví dụ
$\int \cos kx \cdot dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$	$\int \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C, (k = 2)$
$\int \sin kx \cdot dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$	$\int \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$

$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$
$\int (ax+b)^\alpha .dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (2x+1)^2 .dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{6} \cdot (2x+1)^3 + C$
$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \ln 3x-1 + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} du = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}} du = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+5} + C$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$
$\int a^{mx+n} du = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$	$\int 5^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2x+1}}{\ln 5} + C$
$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$
$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\int \sin(3x-1) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)} dx = \frac{1}{2} \tan(2x+1) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)} dx = -\frac{1}{3} \cot(3x+1) + C$
*Chú ý: Những công thức trên có thể chứng minh bằng cách lấy đạo hàm về trái hoặc tính bằng phương pháp đổi biến số đặt $u = ax + b \Rightarrow du = .?.dx \Rightarrow dx = .?.du$ Ví dụ: Chứng minh $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, a \neq 0$ Giải: Đặt $u = ax + b \Rightarrow du = (ax+b)' dx = a.dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}.du$ Suy ra $\int \cos(ax+b) dx = \int \cos u . \frac{1}{a} .du = \frac{1}{a} \int \cos u .du = \frac{1}{a} .\sin u + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa và các tính chất

A/ Tìm nguyên hàm của các hàm số.

Bài 1: Sử dụng bảng nguyên hàm và tính chất

$$a) f(x) = 2x^9 - \frac{1}{2}$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{x^{10}}{5} - \frac{1}{2}x + C$$

b) $f(x) = 3^x + x + 1$

kq: $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

c) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$

kq: $F(x) = 2 \ln|x| + 3x + C$

d) $f(x) = 2 \sin x$

kq: $F(x) = -2 \cos x + C$

e) $f(x) = \frac{\cos x}{3}$

kq: $F(x) = \frac{1}{3} \sin x + C$

Bài 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$

ĐS. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$

b) $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

d) $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$

ĐS. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$

e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

ĐS. $F(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

ĐS. $F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$

g) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$

ĐS. $F(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$

h) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

ĐS. $F(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + C$

i) $f(x) = x^5 + 3x^2 - 4$

kq: $F(x) = \frac{x^6}{6} + x^3 - 4x + C$

j) $f(x) = \frac{x^3}{2} + 5x^2 + 2x + 1$

kq: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + x^2 + x + C$

k) $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 3x^5 + 3x^2 - 2$

kq: $F(x) = -\frac{2}{21}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + x^3 - 2x + C$

l) $f(x) = (2x + 3x^{-2})(x^2 - \frac{1}{x}) + 3x^{-3}$

kq: $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + x + C$

Bài 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số

$$a) \int (x-2)(x+4)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + C$$

$$b) \int (x^2 - 3)(x+1)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + C$$

$$c) \int 3(x-3)^2 dx$$

$$\text{kq: } F(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + C$$

$$g) \int \frac{x^2 - 5x}{x} dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

$$h) \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 1}{x} dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \ln|x| + C$$

$$g) \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 1}{x^2} dx$$

$$\text{kq: } F(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x} + C$$

$$h) \int \frac{(x+2)^2}{x} dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 4\ln|x| + C$$

$$i) \int \frac{(x+4)^2}{x^2} dx$$

$$\text{kq: } F(x) = x + 8\ln|x| - \frac{16}{x} + C$$

Bài 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số

$$a) \int (x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} - 5)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 5x + C$$

$$b) \int (x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2x^2 + x + C$$

$$c) \int \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2x)(x+1)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

$$d) \int (2x+1)(1 - \frac{1}{x})dx$$

$$\text{kq: } F(x) = x^2 - \ln|x| - x + C$$

Bài 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số

$$a) \int (2 \cdot 3^x + 4^x)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

$$b) \int (2 \cdot a^x + 5^x)dx$$

$$\text{kq: } F(x) = \frac{2 \cdot a^x}{\ln a} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

$$c) \int (3e^x + 5\sin x - \frac{1}{x})dx$$

$$\text{kq: } F(x) = 3e^x - 5\cos x - \ln|x| + C$$

$$d) \int e^x (2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$$

$$\text{kq: } F(x) = 2 \cdot e^x + \tan x + C$$

$$e) \int 2^x \cdot 3^x dx \quad \text{kq: } F(x) = \frac{6^x}{\ln 3} + C$$

$$f) \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x dx \quad \text{kq: } F(x) = \frac{90^x}{\ln 90} + C$$

$$g) \int e^x (2 - e^{-x}) dx \quad \text{kq: } 2e^x - x + C$$

$$h) \int \frac{e^x}{2^x} dx \quad \text{kq: } \frac{e^x}{(1 - \ln 2)2^x} + C$$

Bài 6: Tính nguyên hàm của các hàm số

$$a) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad \text{kq: } F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

$$b) \int (2x + \sin^2 \frac{x}{2}) dx$$

$$c) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx \quad \text{kq: } F(x) = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

$$d) \int (2x^2 + \cos^2 \frac{x}{2}) dx$$

$$HD: \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$e) \int (1 + \tan^2 x) dx \quad \text{kq: } F(x) = \tan x + C$$

$$d) \int (1 + \cot^2 x) dx \quad \text{kq: } F(x) = -\cot x + C$$

$$e) \int \tan^2 x dx \quad \text{kq: } F(x) = \tan x - x + C$$

$$f) \int \cot^2 x dx \quad \text{kq: } F(x) = -\cot x - x + C$$

$$HD: 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$g) \int (\tan x - \cot x)^2 dx \quad \text{kq: } F(x) = \tan x - \cot x - 4x + C$$

$$h) \int (2 \tan x + \cot x)^2 dx \quad \text{kq: } F(x) = 4 \tan x - \cot x - x + C$$

$$HD: (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h) \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \quad \text{kq: } F(x) = \tan x - \cot x + C$$

$$h) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \quad \text{kq: } F(x) = -\tan x - \cot x + C$$

$$HD: \sin^2 x + \cos^2 x = 1; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Bài 7: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

a) $f'(x) = 2x + 1; f(1) = 5$

kq: $f(x) = x^2 + x + 3$

b) $f'(x) = 2 - x^2; f(2) = \frac{7}{3}$

kq: $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$

c) $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2; f(1) = 2$

kq: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2x - \frac{3}{2}$

d) $f'(x) = 4\sqrt{x} - x; f(4) = 0$

kq: $f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$

e) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2; f(-1) = 3$

kq: $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$

f) $f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1; f(1) = 2$

kq: $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x$

g) $f'(x) = (x+1)(x-1) + 1; f(0) = 1$

kq: $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$

h) $f'(x) = 3(x+2)^2; f(0) = 8$

kq: $f(x) = (x+2)^3$

Bài 8: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

a) $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}; f(-1) = 2, f(1) = 4$

kq: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

b) $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}; f(1) = 4, f(4) = 9$

kq: $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm theo công thức biến đổi**a) Phương pháp đổi biến số.**Tính $I = \int f[u(x)] \cdot u'(x) dx$ bằng cách đặt $t = u(x)$

- Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$
- $I = \int f[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int f(t) dt$

BÀI TẬP**Bài 1:** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $\int (5x - 1) dx$

2. $\int \frac{dx}{(3 - 2x)^5}$

3. $\int \sqrt{5 - 2x} dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1}}$

5. $\int (2x^2 + 1)^7 x dx$

6. $\int (x^3 + 5)^4 x^2 dx$

7. $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$

8. $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

9. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5 + 2x^3}} dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 + \sqrt{x})^2}}$

11. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

12. $\int x \cdot e^{x^2 + 1} dx$

13. $\int \sin^4 x \cos x dx$

14. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

15. $\int \cot g x dx$

16. $\int \frac{tg x dx}{\cos^2 x}$

17. $\int \frac{dx}{\sin x}$ 18. $\int \frac{dx}{\cos x}$ 19. $\int \operatorname{tg} x dx$ 20. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
21. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}}$ 22. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ 23. $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx$ 24. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
25. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} \cdot dx$ 26. $\int \frac{dx}{1+x^2}$ 27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 28. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$
29. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$ 30. $\int x \sqrt{x-1} \cdot dx$ 31. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ 32. $\int x^3 \sqrt{x^2+1} \cdot dx$

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên I

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{với } du = u'(x) dx, \quad dv = v'(x) dx)$$

Bài 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

1. $\int x \cdot \sin x dx$ 2. $\int x \cos x dx$ 3. $\int (x^2 + 5) \sin x dx$ 4. $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$
5. $\int x \sin 2x dx$ 6. $\int x \cos 2x dx$ 7. $\int x \cdot e^x dx$ 8. $\int \ln x dx$
9. $\int x \ln x dx$ 10. $\int \ln^2 x dx$ 11. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$ 12. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
13. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ 14. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ 15. $\int \sin \sqrt{x} dx$ 16. $\int \ln(x^2 + 1) dx$
17. $\int e^x \cdot \cos x dx$ 18. $\int x^3 e^{x^2} dx$ 19. $\int x \ln(1+x^2) dx$ 20. $\int 2^x x dx$
21. $\int x \lg x dx$ 22. $\int 2x \ln(1+x) dx$ 23. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$ 24. $\int x^2 \cos 2x dx$

CHUYÊN ĐỀ 4. TÍCH PHÂN

Dạng 1: Tính toán giá trị tích phân cơ bản

Bài 1: Tính giá trị các tích phân sau

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx$ | 25. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ |
| 2. $\int_0^1 (2x+1)e^{2x} dx$ | 26. $\int_0^1 e^x \sin e^x dx$ |
| 3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3x+2}$ | |
| 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x} dx$ | |

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

$$6. \int_0^1 x^3 (1 - x^2)^3 dx$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$$

$$9. \int_0^1 e^{-x^2} x dx$$

$$10. \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 x)^2 \sin 2x dx$$

$$12. \int_1^4 \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})}$$

$$13. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$14. \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + 1}$$

$$15. \int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$16. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$$

$$17. \int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

$$18. \int_{\sqrt[3]{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$$

$$19. \int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$27. \int_0^1 (x^2 + 1) \cdot e^x dx$$

$$28. \int_1^2 x \sqrt{x^2 + 3} dx$$

$$29. \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$$

$$30. \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + 1) \cdot \sin x dx$$

$$31. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$32. \int_0^1 (x+1) e^x dx$$

$$33. \int_1^e \sqrt{x} \ln x \cdot dx$$

$$34. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cdot \cos x \cdot dx$$

$$35. \int_2^3 \frac{3}{-5x^2 + 2x + 3} dx$$

$$36. \int_2^3 \frac{2x+3}{5x^2 + 3x - 8} dx$$

$$37. \int_1^2 \frac{x^2 - 4x + 7}{x+1} dx$$

$$38. \int_0^1 \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$39. \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - x - 2} dx$$

$$40. \int_0^1 \frac{x^4}{x-3} dx$$

$$20. \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$21. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1+2\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$22. \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$23. \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$24. \int_0^{\ln \sqrt{2}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$41. \int_0^1 \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 7}{x+1} dx$$

Bài 2: Tính giá trị các tích phân hàm lượng giác sau

$$1. \int_0^{\pi} \cos 3x \cdot \cos 2x \cdot dx$$

$$2. \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$$

$$5. \int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$6. \int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot dx$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} \cdot dx$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 3} \cdot dx$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 - \sin^2 x} \cdot dx$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2+\sin^2 x} \cdot \sin 2x \cdot dx$$

$$12. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5 x \cdot dx$$

$$13. \int_0^{\pi} \cos^4 x \cdot dx$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^4 x} dx$$

$$14. \int_0^{\pi} \cos^3 x dx$$

Bài 3: Tính tích phân sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

$$1. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$5. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+4\sin x \cos x} dx$$

$$7. \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$$

$$8. \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$9. \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1} dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$11. \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} dx$$

$$12. \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$14. \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$16. \int_0^1 \frac{1}{(1+3x^2)^2} dx$$

$$17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$18. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$19. \int_0^1 e^{x^2+2} x dx$$

$$20. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$21. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$22. \int_0^1 e^{x^2+2} x dx$$

$$23. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$24. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$$

$$26. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$27. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x dx$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+4\sin x \cos x} dx$$

$$29. \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx$$

$$30. \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$$

$$31. \int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1} dx$$

$$32. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$33. \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} dx$$

$$34. \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$35. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$36. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$37. \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$$

$$38. \int_1^e \frac{e^{2\ln x+1}}{x} dx$$

$$39. \int_e^{e^2} \frac{1+\ln^2 x}{x \ln x} dx$$

$$40. \int_e^{e^2} \frac{1}{\cos^2(1+\ln x)} dx$$

$$41. \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$$

$$42. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$43. \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
44. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx & \quad 45. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} dx & 46. \int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx & 46. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \\
47. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx & 48. \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx & 49. \int_1^e \frac{e^{2\ln x+1}}{x} dx & 50. \int_e^{e^2} \frac{1+\ln^2 x}{x \ln x} dx
\end{aligned}$$

Dạng 2: Ứng dụng của tích phân trong tính diện tích, thể tích

I. Tính diện tích miền phẳng

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

$$\begin{aligned}
a) y = x^2 - 2x - 3, y = 0, x = 0, x = 4 & \quad b) y = x^3 - 4x, y = 0, x = -2, x = 4 \\
c) y = (x+2)e^{2x}, y = 0, x = 0, x = 3 & \quad d) y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2} \\
e) y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}, y = 0, x = e, x = 1 & \quad f) y = x(x+1)(x-3), y = 0
\end{aligned}$$

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

$$\begin{aligned}
a) y = 2\sqrt{1-x^2}, y = 2(1-x) & \quad b) y = x^3 - 12x, y = x^2 \\
c) y = 1 - \sqrt{1-x^2}, y = x^2 & \\
d) y = |x|, y = 2 - x^2 & \quad e) y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}, y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \\
f) y = -\sqrt{4-x^2}, x^2 + 3y = 0 & \quad g) y = 4 - 4y^2, y = 1 - x^4
\end{aligned}$$

Bài 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

$$\begin{aligned}
a) y = (x-1)^2, y = \frac{x^2 - 2x + 1}{8}, y = \frac{8}{x-1} & \quad b) y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0 \\
c) y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}, y = |x| & \\
d) y = 8 - 3x - 2x^2, y = 2 + 9x - 2x^2, y = x + 10 & \\
e) y = |x^2 - 4x|, y = |2x - 7| + 1, x = -1; x = 2 & \quad f) y = |x^2 - 4x + 3|, y = -x + 3 \\
g) y = x^2, y = \frac{x^2}{27}, y = \frac{27}{x} & \quad h) y = 2x^2, y = x^2 - 4x - 4, y = 8 \\
i) y^2 = 2x, 2x + 2y + 1 = 0, y = 0 & \\
j) y = -x^2 + 6x - 5, y = -x^2 + 4x - 3, y = 3x - 15 & \\
k) y = |x|, y = 2 - x^2 & \quad l) y = |x^2 - 4x + 3|, y = x + 3
\end{aligned}$$

Bài 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

$$a) (C): y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \text{ tiếp tuyến với } (C) \text{ tại } A(0; 1).$$

b) (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$, $y = 0$, tiếp tuyến với (C) tại A(-2; 1).

c) (P): $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với (P) tại A(1;2) và B(4;5).

d) (C): $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$, trục Ox và tiếp tuyến của (C) vẽ từ O.

II. Tính thể tích vật thể

Bài 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox:

a) $y = \cos 2x, y = 0, x = 0, x = \pi$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0$, tiếp tuyến với (H) tại A(2;-1)

c) $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

d) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}, x = 0, x = 1$

e) $y = x \ln x, y = 0, x = 1, x = e$

f) $x^2 + (y-2)^2 \leq 1$

g) $y^2 = (4-x)^3, y^2 = 4x$

h) $y = -x^2 + 4x, y = x + 2$

i) $y = \frac{1}{x} - 1, y = 0, y = 2x$

k) $y = |2x - x^2|, y = 0, x = 3$

Bài 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Oy:

a) $y = |2x - x^2|, y = 0, x = 3$

b) $y = (2x+1)^{1/3}, y = 3, x = 0$

c) $y = \ln x, y = 0, x = e$

d) $x = y^2 + 3, x = 4y$

Bài 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox

a) $y = \frac{x-1}{x}, y = \frac{1}{x}, x = 1$

b) $y = x^2, y = 4x^2, y = 4$

c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}, y = 0, x = 0, x = 1$

d) $y = \sqrt{x} - 1, y = 0, x = 4$

e) $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

f) $y = \sqrt{\cos x}, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

g) $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 1, x = 2$

h) $y^2 = x^3, y = 0, x = 1$

i) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$

k) $y = 2\sqrt{2x - x^2}, y = 4 - 2x$

l) $y = 2x^2, y = x^3$

m) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

PHẦN HÌNH HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH - THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Dạng 1. Bài tập về hình chóp, tứ diện, lăng trụ

Bài 1: Đáy của một hình chóp là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy mỗi mặt bên còn lại tạo với đáy một góc 45° .

- Chứng minh rằng chân đường cao hình chóp trùng với trung điểm cạnh huyền.
- Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là các giao điểm các đường chéo của đáy dưới $ABCD$, biết $OA' = a$.

- Tính thể tích hình chóp $A'.ABD$, từ đó suy ra khoảng cách từ đỉnh A đến mp $(A'BD)$
- Chứng minh rằng AC' vuông góc với mp $(A'BD)$.

Bài 3: Một hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $BB' = a$, chân đường vuông góc hạ từ B' xuống đáy ABC trùng với trung điểm I của cạnh AC .

- Tính góc giữa cạnh bên và đáy. Tính thể tích hình lăng trụ
- Chứng minh rằng mặt bên $AA'C'C$ là hình vuông.

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông tại B . Biết $BB' = AB = h$ và góc của $B'C$ làm với mặt đáy một góc α .

- Chứng minh rằng $BC \perp CB'$ và tính thể tích hình lăng trụ trên.
- Tính diện tích thiết diện tạo nên do mặt phẳng (ACB') cắt hình lăng trụ.

Bài 5: Đáy $ABCD$ của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông. Hai mặt bên SAB và SAD cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

- Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
- Tính thể tích khối tứ diện $SBCD$, biết rằng $SA = AB = a$.

Bài 6: Đáy $ABCD$ của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cũng có độ dài bằng a .

- Chứng minh rằng SAC và SBC là những tam giác vuông bằng nhau. Tính diện tích tam giác SAC .
- Tính thể tích khối tứ diện $SABD$.

BÀI TẬP CHUYÊN VỀ HÌNH CHÓP ĐỀU

Bài 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$.

- Tính $V_{S.ABC}$.
- Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có $AB = a$, góc giữa SA với mặt đáy (SBC) bằng 30° .

- Tính $V_{S.ABC}$.
- Tính khoảng cách giữa SA và BC .

Bài 9: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có $AB = a$. Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 30° . Tính $V_{S.ABC}$.

Bài 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a . Gọi H là chân đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh S và H cách đều các đỉnh A, B, C . Khoảng cách từ H đến (SBC) bằng $\frac{a}{2}$.

- Chứng minh $S.ABC$ là khối chóp đều.
- Tính $V_{S.ABC}$

Bài 12: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $CD = 2a$, các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{2}$.

- Chứng minh $AB \perp CD$. Xác định đường vuông góc chung của AB và CD .
- Tính V_{ABCD}
- Nhận dạng tam giác ACD và BCD . Từ đó tìm tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Bài 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a, SA = a\sqrt{3}$

- Tính $V_{S.ABCD}$
- Tính khoảng cách từ tâm của $ABCD$ đến mặt phẳng (SCD) .

Bài 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $AB = a$, góc giữa SC với mặt đáy bằng 60° .

- Tính $V_{S.ABCD}$
- Tính khoảng giữa BD và SC .

Bài 15: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $SA = a\sqrt{3}$, góc giữa (SCD) với mặt đáy bằng 60° .

- Tính $V_{S.ABCD}$
- Tính khoảng giữa SA và CD .

Bài 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có $ABCD$ là hình vuông tâm O , khoảng cách từ O đến (SCD) bằng a , góc giữa (SCD) với mặt đáy bằng 60° . Tính $V_{S.ABCD}$.

Bài 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$. Tính $V_{S.ABCD}$ theo a .

Bài 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{5}$. Một mặt phẳng (P) qua AB và vuông góc với (SCD) cắt SC và SD tại C' và D' .

- Tính $S_{ABC'D'}$
- Tính $V_{ABCDD'C'}$

Bài 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$. Các cạnh bên bằng nhau và cùng bằng $a\sqrt{2}$.

- Tính $V_{S.ABCD}$ theo a .
- Gọi M, N là trung điểm của AB và CD , K là điểm trên cạnh AD sao cho $AK = \frac{a}{3}$.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và SK theo a .

Bài 20: Cho tứ diện đều $S.ABC$ có cạnh bằng a . Dựng đường cao SH .

- a) Chứng minh $SA \perp BC$.
- b) Tính thể tích khối chóp và diện tích toàn phần của tứ diện.
- c) Gọi O là trung điểm của SH. Chứng minh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

Bài 21: Cho hình chóp S.ABCD có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

- a) Tính thể tích của khối chóp.
- b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 22: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên tạo với đáy một góc 60° và cạnh đáy bằng a.

- a) Tính $V_{S.ABCD}$
- b) Qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi (P).

Bài 23: Cho hình chóp đều S.ABCD có khoảng cách từ tâm O của đáy đến mặt bên là a, góc giữa mặt bên và đường cao bằng 30° .

- a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD
- b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. M là điểm trên cạnh SD sao cho $MS = 2MD$. Mặt phẳng (MEF) cắt SA tại N. Tính thể tích khối chóp S.EFMN.

Bài 24: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên trên SC. Chứng minh $SC \perp (ABH)$. Tính thể tích khối chóp S.ABH

BÀI TẬP CHUYÊN VỀ LĂNG TRỤ ĐỨNG

Bài 25: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = 2a$, Mặt phẳng (A'BC) tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60° .

- a) Chứng minh $AB \perp (ACC'A')$
- b) Tính thể tích khối lăng trụ theo a.
- c) Tính khoảng cách từ A đến đến mp(A'BC).
- d) Tính từ AA' đến mp(BCC'B').

Bài 26: Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C', góc giữa mặt phẳng (C'AB) với (ABC) bằng 30° , khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABB'A') bằng a. Tính khoảng cách từ C đến mp(C'AB) và thể tích khối lăng trụ.

Bài 27: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a, \angle ACB = 60^\circ$, biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30° . Tính AC' và thể tích lăng trụ.

Bài 28: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.

Bài 29: Cho hình lăng trụ đều ABCD.A'B'C'D', góc giữa (B'AC) với mặt đáy (ABCD) bằng 60° , khoảng cách từ B đến (B'AC) bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D'.

Bài 30: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy (ABC) một góc 30° và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 31: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa AB và A_1D bằng 2. Độ dài đường chéo mặt bên bằng 5.

- Hạ $AK \perp A_1D$. Chứng minh $AK = 2$.
- Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Dạng 2. Bài tập về khối nón, khối trụ

Bài 1: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng a .

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón
- Tính thể tích của khối nón
- Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích của thiết diện này

Bài 2: Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$.

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón
- Tính thể tích của khối nón
- Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm . Tính diện tích của thiết diện đó

Bài 3: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$

- Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón
- Tính thể tích của khối nón
- Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC

Bài 4: Một hình trụ có đáy là đường tròn tâm O bán kính R . $ABCD$ là hình vuông nội tiếp trong đường tròn tâm O . Dựng các đường sinh AA' và BB' . Góc của $mp(A'B'CD)$ với đáy hình trụ là 60° .

- Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ.
- Tính thể tích khối đa diện $ABCD B'A'$.

CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1. Bài tập cơ bản ứng dụng về điểm, đoạn thẳng, góc

Bài 1: Trong không gian Oxyz cho $A(0;1;2)$; $B(2;3;1)$; $C(2;2;-1)$

- Tính $F = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot (\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{CB})$.
- Chứng tỏ rằng $OABC$ là một hình chữ nhật tính diện tích hình chữ nhật đó.
- Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .
- Cho $S(0;0;5)$. Chứng tỏ rằng $S.OABC$ là hình chóp. Tính thể tích hình chóp.

Bài 2: Cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-2;1;-1)$

- Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$.
- Tính các góc của tam giác ABC .
- Tính diện tích tam giác BCD .
- Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và độ dài đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A .

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(0,0,0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;3)$, $C'(1;2;3)$.

- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tính thể tích hình hộp.
- Chứng tỏ rằng AC' đi qua trọng tâm của hai tam giác $A'BD$ và $B'CD'$.
- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của D lên đoạn $A'C$.

Bài 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;3;4)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của A lên ba trục tọa độ $Ox; Oy, Oz$ và N_1, N_2, N_3 là hình chiếu của A lên ba mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx .

- Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 và N_1, N_2, N_3 .
- Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp AN_3$.
- Gọi P, Q là các điểm chia đoạn N_1N_2, OA theo tỷ số k xác định k để $PQ \parallel M_1N_1$.

Bài 5: Thực hiện tìm

- Cho ba điểm $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$, $C(x; y; 6)$. Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng
- Cho hai điểm $A(-1; 6; 6)$, $B(3; -6; -2)$. Tìm M thuộc $mp(Oxy)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.
- Tìm trên Oy điểm cách đều hai điểm $A(3; 1; 0)$ và $B(-2; 4; 1)$.
- Tìm trên mặt phẳng Oxz cách đều ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; -1)$.
- Cho hai điểm $A(2; -1; 7)$, $B(4; 5; -2)$. Đường thẳng AB cắt $mp(Oyz)$ tại điểm M . Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm M .

Bài 6: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 0; 2)$, $D(1; 1; 1)$

- Chứng minh bốn điểm không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC , trọng tâm tứ diện $ABCD$.
- Tính diện tích các mặt của tứ diện.
- Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.
- Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
- Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Dạng 2. Bài toán về phương trình mặt phẳng và đường thẳng**Bài 1:** Thực hiện tìm

- Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng qua hai điểm $A(1;3;1)$ và $B(4;1;2)$.
- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(2;-1;1)$ vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) .
- Viết phương trình tham số, chính tắc của đường thẳng d là phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 4 = 0$, $(Q): x - y + 2z + 2 = 0$

Bài 2: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;0;2)$, $C(3;1;0)$ và một đường

$$\text{thẳng } (\Delta) \text{ có phương trình } \begin{cases} x = t \\ y = 9 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C .
- Viết phương trình tham số, chính tắc đường thẳng BC . Tính $d(BC, \Delta)$.
- Chứng tỏ rằng mọi điểm M của đường thẳng (Δ) đều thỏa mãn $AM \perp BC$, $BM \perp AC$, $CM \perp AB$.

Bài 3: Trong không gian cho hình hộp chữ nhật có các đỉnh $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;5)$, $O(0;0;0)$ và D là đỉnh đối diện với O .

- Xác định tọa độ đỉnh D . Viết phương trình tổng quát mặt phẳng (A, B, D) .
- Viết phương trình đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (A, B, D) .
- Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (A, B, D) .

Bài 4: Cho hai đường thẳng: $(\Delta): \begin{cases} x = -2t' \\ y = 3 \\ z = 1 + t' \end{cases}$ $(\Delta'): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ $t, t' \in \mathbb{R}$

- Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ') không cắt nhau nhưng vuông góc nhau.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') .
- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua (Δ) và vuông góc với (Δ') .
- Viết phương trình đường vuông góc chung của (Δ) và (Δ') .

Bài 5: Trong không gian Oxyz cho bốn điểm $A(-1;-2;0)$, $B(2;-6;3)$, $C(3;-3;-1)$, $D(-1;-5;3)$.

- Lập phương trình tham số đường thẳng AB .
- Lập phương trình mp (P) đi qua điểm C và vuông góc với đường thẳng AB .
- Lập phương trình đường thẳng (d) là hình chiếu vuông góc của đường thẳng CD xuống mặt phẳng (P) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Bài 6: Trong không gian Oxyz cho $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$.

- Tính các góc tạo bởi các cặp cạnh đối diện của tứ diện ABCD.
- Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
- Viết phương trình đường thẳng (d) qua D vuông góc với mặt phẳng (ABC).
- Tìm tọa độ điểm D' đối xứng D qua mặt phẳng (ABC).
- Tìm tọa độ điểm C' đối xứng C qua đường thẳng AB.

Bài 7: Cho đường thẳng

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và mp (P): } x + y + z - 7 = 0$$

- Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- Tìm tọa độ giao điểm của (Δ) và (P).
- Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (Δ) trên mp(P).

Bài 8: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') lần lượt có phương

$$\text{trình: } \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad ; \quad \Delta': \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

- Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ') cùng nằm trong mặt phẳng (α)
- Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α)
- Viết phương trình đường thẳng (d) vuông góc và cắt cả hai đường (Δ) và (Δ') .

Bài 9: Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(5;0;0), B(0;5/2;0), C(0;0;5/3) và đường thẳng $(\Delta): x = 5 + t; y = -1 + 2t; z = -4 + 3t$.

- Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B, C. Chứng minh rằng (α) và (Δ) vuông góc nhau, tìm tọa độ giao điểm H của chúng.
- Chuyển phương trình của (Δ) về dạng tổng quát. Tính khoảng cách từ M(4;-1;1) đến (Δ) .
- Lập phương trình đường thẳng (d) qua A vuông góc với (Δ) , biết (d) và (Δ) cắt nhau.

Dạng 3. Bài toán về phương trình mặt cầu

Bài 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình tương ứng: (P): $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 5z + 6 = 0$

- Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).
- Tính khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P). Từ đó, suy ra rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn mà ta ký hiệu là (C). Xác định bán kính R và tọa độ tâm H của đường tròn (C).

Bài 2: Trong không gian cho (P): $x + 2y - z + 5 = 0$ điểm $I(1;2;-2)$ và đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in R$$

- Tìm giao điểm của (d) và (P). Tính góc giữa (d) và (P).
- Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P).
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua (d) và I.
- Viết phương trình đường thẳng (d') nằm trong (P) cắt (d) và vuông góc (d).

Bài 3: Trong không gian Oxyz cho $A(1;-1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(4;3;2)$, $D(4;-1;2)$.

- Chứng minh A,B,C,D là bốn điểm đồng phẳng.
- Gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D .
- Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu (S) tại điểm A' .

Bài 4: Trong không gian Oxyz cho $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;4)$.

- Viết phương trình mặt cầu qua 4 điểm O,A,B,C. Tìm tọa độ tâm I và bán kính của mặt cầu.
- Viết phương trình mặt phẳng(ABC).
- Viết phương trình tham số của đường thẳng qua I và vuông góc mặt phẳng(ABC).
- Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 5: Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

- Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S).
- Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm (khác điểm gốc tọa độ) của mặt cầu (S) với các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Tính tọa độ A,B,C và viết phương trình mặt phẳng (ABC).
- Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng. Từ đó hãy xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.